1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 20 décembre 2013 (30 min)

Prénom : …………………………………… **Nom :** …………………………………… ……. **/20**

I. (2 points)

Voulant étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{3x^2}{x^2-2x+5}$ définie sur $\mathbb{R}$, un élève a d'abord calculé la dérivée et a obtenu $f'(x) = \dfrac{6x^2-30x}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$. Afin de déterminer le signe de $f'(x)$, il a ensuite cherché les racines du polynôme $6x^2-30x$.

Voici un extrait de sa rédaction :

> $6x^2-30x$ est un polynôme du second degré.
>
> Soit Δ son discriminant.
>
> $\Delta = (-30)^2 - 4\times 6\times 0 = 900$
>
> $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 distinctes dans $\mathbb{R}$.
>
> | | |
> |---|---|
> | $x_1 = \dfrac{30-\sqrt{900}}{2\times 6}$ | $x_2 = \dfrac{30+\sqrt{900}}{2\times 6}$ |
> | $= \dfrac{0}{12}$ | $= \dfrac{60}{12}$ |
> | $= 0$ | $= 5$ |

Il a ensuite dressé un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Pourquoi la méthode de recherche des racines du polynôme $6x^2-30x$ est-elle maladroite ?
Quelle méthode aurait-il dû utiliser pour déterminer très rapidement les racines ?

……..

……..

……..

……..

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;2\}$.

Voici la méthode employée par un élève pour dériver cette fonction :

$$f'(x) = 0 + \frac{0\times(x+1) - 1\times 1}{(x+1)^2} + \frac{0\times(x-2)-1\times 1}{(x-2)^2}$$
$$= -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

Dans la première ligne de son calcul, l'élève a utilisé à deux reprises la formule générale de dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ valable pour deux fonctions *u* et *v* dérivables sur un intervalle I sur lequel *v* ne s'annule pas.

Quelle formule aurait-il dû plutôt employer ?
Répondre sans faire de phrase en écrivant uniquement la formule.

III. (2 points)

On s'intéresse à la résolution de l'inéquation $|2x-1| > |x|$ (1).
On présente dans le cadre ci-dessous une méthode de résolution de (1).

> (1) est successivement équivalente à :
>
> $|2x-1|^2 > |x|^2$ (2)
>
> $(2x-1)^2 > x^2$
>
> $(3x-1)(x-1) > 0$
>
> L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S = \left]-\infty\ ;\dfrac{1}{3}\right[\cup \left]1\ ;+\infty\right[$.

Choisir parmi les phrases au verso celle(s) qui constitue(nt) un (des) argument(s) permettant de justifier que les inéquations (1) et (2) sont équivalentes.

① Les deux membres de l'inéquation (1) sont positifs ou nuls (car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul).

② Pour tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, $a > b$ si et seulement si $a^2 > b^2$.

③ Le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.

Répondre sans faire de phrase en indiquant les numéros des phrases choisies : ………………………………..

IV. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \text{...}$$

On donnera un seul résultat écrit sous la forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé.

2°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f ; on calculera au brouillon les extremums locaux. On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

V. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2 + 3x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; -3\}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; -3\} \quad f'(x) = \text{...}$ (écrire une seule expression)

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 2. Démontrer que T passe par l'origine O du repère.

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

…….

VI. (2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 18$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f admet un minimum global.

On admet qu'une autre expression de f est $f(x, y) = 2(x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$.

Compléter le raisonnement suivant :

Un carré est toujours positif donc pour tout couple (x, y) de réels on a : $2(x-2)^2 + (y-3)^2 \geqslant 0$.

Par suite, pour tout couple (x, y) de réels, on a $f(x, y) \geqslant 1$ (1).

De plus, $f(\text{......} , \text{......}) = 1$ (2) (remplacer les pointillés par des nombres).

D'après (1) et (2), f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ égal à …… et atteint pour le couple (…… ; ……).

Corrigé du contrôle du 20-12-2013

I.

Voulant étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{3x^2}{x^2-2x+5}$ définie sur $\mathbb{R}$, un élève a d'abord calculé la dérivée et a obtenu $f'(x)=\dfrac{6x^2-30x}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$. Afin de déterminer le signe de $f'(x)$, il a ensuite cherché les racines du polynôme $6x^2-30x$.

Voici un extrait de sa rédaction :

> $6x^2-30x$ est un polynôme du second degré.
>
> Soit Δ son discriminant.
>
> $\Delta=(-30)^2-4\times 6\times 0=900$
>
> $\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 distinctes dans $\mathbb{R}$.
>
> | | |
> |---|---|
> | $x_1=\dfrac{30-\sqrt{900}}{2\times 6}$ | $x_2=\dfrac{30+\sqrt{900}}{2\times 6}$ |
> | $=\dfrac{0}{12}$ | $=\dfrac{60}{12}$ |
> | $=0$ | $=5$ |

Il a ensuite dressé un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Pourquoi la méthode de recherche des racines du polynôme $6x^2-30x$ est-elle maladroite ?
Quelle méthode aurait-il dû utiliser pour déterminer très rapidement les racines ?

Le polynôme $6x^2-30x$ est incomplet ; il faut le factoriser par $6x$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;2\}$.

Voici la méthode employée par un élève pour dériver cette fonction :

$$f'(x)=0+\frac{0\times(x+1)-1\times 1}{(x+1)^2}+\frac{0\times(x-2)-1\times 1}{(x-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$$

Dans la première ligne de son calcul, l'élève a utilisé à deux reprises la formule générale de dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ valable pour deux fonctions *u* et *v* dérivables sur un intervalle I sur lequel *v* ne s'annule pas.

Quelle formule aurait-il dû plutôt employer ?
Répondre sans faire de phrase en écrivant uniquement la formule.

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}}$$

III.

On s'intéresse à la résolution de l'inéquation $|2x-1|>|x|$ (1).
On présente dans le cadre ci-dessous une méthode de résolution de (1).

> (1) est successivement équivalente à :
>
> $|2x-1|^2>|x|^2$ (2)
>
> $(2x-1)^2>x^2$
>
> $(3x-1)(x-1)>0$
>
> L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.

Choisir parmi les phrases au verso celle(s) qui constitue(nt) un (des) argument(s) permettant de justifier que les inéquations (1) et (2) sont équivalentes.

① Les deux membres de l'inéquation (1) sont positifs ou nuls (car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul).

② Pour tout couple (*a*, *b*) de réels positifs ou nuls, *a* > *b* si et seulement si $a^2>b^2$.

③ Le carré d'un nombre est toujours positif ou nul.

Répondre sans faire de phrase en indiquant les numéros des phrases choisies : **① et ②**.
Beaucoup d'élèves ont mis la phrase ③ qui ne constitue pas un argument pour démontrer l'équivalence.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{4}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

On donnera un seul résultat écrit sous la forme d'un quotient dont le numérateur est factorisé.

2°) Étudier dans un même tableau le signe de $f'(x)$ et les variations de f ; on calculera au brouillon les extremums locaux. On tracera les traits, flèches de variations, barres de fraction à la règle.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		–	|	–	|	–	0 (num)	+	
Signe de $x+2$		–	0 (num)	+	|	+	|	+	
Signe de x^2		+	|	+	0 (dén)	+	|	+	
Signe de $f'(x)$		+	0 (num)	–	||	–	0 (num)	+	
Variations de f		↗	-4	↘	||	↘	4	↗	

On utilise la calculatrice pour vérifier les variations de f.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2+3x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;-3\}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\,;-3\} \quad f'(x) = -\frac{6x+9}{\left(x^2+3x\right)^2}$$ (écrire une seule expression)

2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse – 2. Démontrer que T passe par l'origine O du repère.

$f(-2) = -\dfrac{3}{2}$ $\quad f'(-2) = \dfrac{3}{4}$

T a pour équation $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ soit $y = \dfrac{3}{4}(x+2) - \dfrac{3}{2}$ soit $y = \dfrac{3}{4}x$.

On en déduit que T passe par l'origine du repère (car T admet une équation de la forme $y = mx$).

On utilise la calculatrice pour vérifier l'équation de la tangente.

VI.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 18$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f admet un minimum global.

On admet qu'une autre expression de f est $f(x, y) = 2(x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$.

Compléter le raisonnement suivant :

Un carré est toujours positif donc pour tout couple (x, y) de réels on a : $2(x-2)^2 + (y-3)^2 \geqslant 0$.

Par suite, pour tout couple (x, y) de réels, on a $f(x, y) \geqslant 1$ (1).

De plus, $f(2, 3) = 1$ (2) (remplacer les pointillés par des nombres).

D'après (1) et (2), f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ égal à **1** et atteint pour le couple (**2** ; **3**).

Version sèche du dernier exercice
à savoir refaire sous cette forme

VI.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 18$.

1°) Démontrer que pour tout couple (x, y) de réels, on a : $f(x, y) = 2(x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$.

2°) Démontrer que *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.