TS1

Contrôle du jeudi 19 décembre 2013 (50 min)

Prénom : …………………………………… **Nom :** …………………………………… ……. **/20**

I. (10 points)

Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne. On estime que 99 % des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce, on effectue un test de qualité.
Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de 0,995 et déclare donc qu'elle est mauvaise avec une probabilité de 0,005.
Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,99 et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,01.

Dans cet exercice, on attend uniquement les réponses (sans aucune notation).
On donnera les résultats des probabilités du 1°) et du 2°) sous forme décimale (valeur exacte).
On donnera le résultat de la probabilité du 3°) sous la forme d'une fraction irréductible.
On donnera les résultats des probabilités du 4°) en valeurs arrondies à la cinquième décimale.

1°) Calculer la probabilité que le test indique que la pièce est bonne.

2°) Calculer la probabilité que le test conduise à une erreur.

3°) On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

Calculer la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.

4°) On tire au hasard successivement et avec remise 10 pièces écartées de la vente.

a) Calculer la probabilité de tirer exactement 5 bonnes pièces.

b) Calculer la probabilité de tirer au moins 3 bonnes pièces.

1°) ………………………………..

2°) ………………………………..

3°) ………………………………..

4°)

a) ………………………………..

b) ………………………………..

II. (4 points)

On s'intéresse à une population pour laquelle on dispose des informations suivantes :

- 60 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie M et parmi celles-ci, les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

On note A et B les événements ainsi définis :

- A : « la personne choisie est une femme » ;
- B : « la personne choisie est atteinte de la maladie M ».

1°) Calculer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ (valeur exacte) ; en déduire $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ (valeur exacte puis valeur arrondie au millième).

2°) **Bonus à ne traiter qu'à la fin s'il reste du temps et si tout le reste a été fait.**

Peut-on affirmer que dans ce pays, une femme risque davantage de développer la maladie M qu'un homme ?
Justifier par le calcul.

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

III. (4 points)

Parmi les 400 billets d'une loterie, 10 font gagner un bon d'achat de 5 €, 8 un bon de 10 €, 5 un bon de 20 €, et un, un bon de 50 €. Les autres billets sont perdants.
Un joueur achète 2 € un billet.
On note X la variable aléatoire qui donne le gain en euros du joueur diminué du prix du billet.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X (probabilités sous forme décimale).

x_i		
$P(\mathrm{X}=x_i)$		Total $=1$

Calculer l'espérance mathématique (valeur exacte) et l'écart-type de X (valeur arrondie au centième).
La formule n'est pas demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

$E(\mathrm{X}) =$ ....

$\sigma(\mathrm{X}) \approx$ .... (valeur arrondie au centième)

IV. (2 points)

Une publicité affirme que 80 % des Français aiment le chocolat. Un sondage à ce sujet est ensuite réalisé auprès de 1000 Français choisis au hasard.
On fait l'hypothèse que la proportion de Français aimant le chocolat est bien $p=0,8$.
La population française est suffisamment nombreuse pour que l'on puisse assimiler le choix des 1000 sondés à une suite de tirages avec remise.

1°) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » I au seuil de 95 % de la fréquence de personnes de cet échantillon aimant le chocolat. On donnera les bornes sous forme décimale.

2°) Lors du sondage, on observe que 750 personnes aiment le chocolat.
L'hypothèse « $p=0,8$ » est-elle rejetée au seuil de risque de 5 % ? Expliquer.

1°) $\mathrm{I}=[$..........................;..........................$]$

2°) ……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

……………………………………………………………………………………………………….....

Corrigé du contrôle du 19-12-2013

I.

Barème : 2 points par réponse

1°) 0,98515

2°) 0,00505

3°) $\frac{1}{3}$

4°)

a) 0,13656

b) 0,70086

Commentaires :

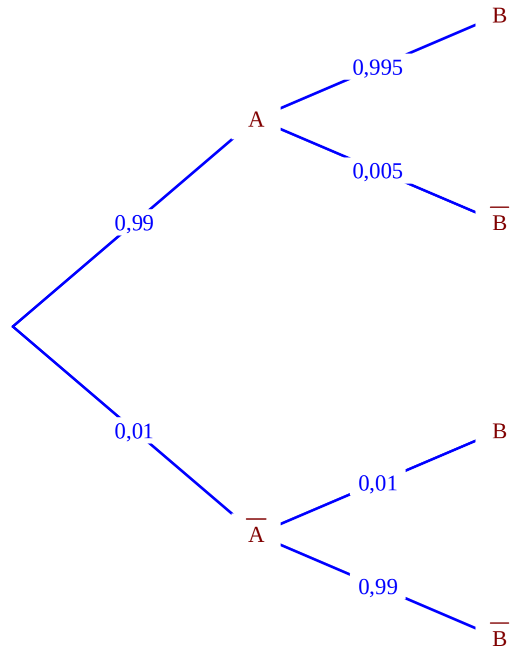
• Pour tout l'exercice, on dresse un arbre de probabilités avec les événements suivants :
A : « La pièce est bonne » et B : « Le test indique que la pièce est bonne ».

• Pour la question 4°), on utilise la loi binomiale de paramètres 10 (nombre de répétitions) et $\frac{1}{3}$ (probabilité d'un succès).

Solution détaillée (non rédigée) :

A : « La pièce est bonne »

B : « Le test indique que la pièce est bonne »



1°) **Probabilité que le test indique que la pièce est bonne :**

A et $\overline{\text{A}}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = 0,99 \times 0,995 + 0,01 \times 0,01 = 0,98515$.

Attention, on ne tronque surtout pas ni n'arrondit le résultat conformément à ce que demande l'énoncé.
Cela a une importance pour le résultat de la question 3°) où il faut trouver $\frac{1}{3}$ (ce qu'on ne trouverait pas si l'on utilisait des valeurs approchées).

2°) **Probabilité que le test conduise à une erreur :**

$P(\text{A} \cap \overline{\text{B}}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B}) = 0,99 \times 0,005 + 0,01 \times 0,01 = 0,00505$

3°) **Probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne :**

$$P(\text{A}/\overline{\text{B}}) = \frac{P(\text{A} \cap \overline{\text{B}})}{P(\overline{\text{B}})} = \frac{P(\text{A} \cap \overline{\text{B}})}{1 - \underbrace{P(\text{B})}_{\text{calculée au 1°)}}} = \frac{0,99 \times 0,005}{0,01485} = \frac{1}{3}$$

4°) On tire au hasard successivement et avec remise 10 pièces écartées de la vente.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes pièces dans un échantillon de 10 pièces.

Comme les tirages sont effectués avec remise, il s'agit d'un schéma de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres 10 (nombre de répétitions) et $\frac{1}{3}$ (probabilité d'un succès).

a) **Probabilité de tirer exactement 5 bonnes pièces :** $P(\text{X}=5)=0{,}136564548...$

b) **Probabilité de tirer au moins 3 bonnes pièces :** $P(\text{X}\geqslant 3)=1-P(\text{X}\leqslant 2)=0{,}700858660...$

a)

On peut utiliser directement la calculatrice ou utiliser la formule du cours.

$$P(\text{X}=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$=252\times\frac{2^5}{3^8}$$

$$=\frac{896}{6561}$$

Pour calculer $\binom{10}{5}$ à la main, on utilise la formule : $\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\times 5!}$.

$$\binom{10}{5}=\frac{5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times5}=252$$

Pour calculer $\binom{10}{5}$ sur calculatrice TI, on effectue : 10 Combinaison 5

*n*C*r*

↑

math PRB

II.

Barème : 1°) sur 1 point 2°) 1 point de bonus

Attention, les événements A et B ne sont pas indépendants, comme je l'ai trouvé écrit dans beaucoup de copies.

On traduit les informations de l'énoncé sous forme de probabilités :

- $P(\text{A})=0{,}6$
- $P(\text{B})=0{,}05$
- $P(\text{A/B})=\frac{2}{3}$

1°) Calculer $P(\text{A}\cap\text{B})$ (valeur exacte) ; en déduire $P(\text{B/A})$ (valeur exacte puis valeur arrondie au millième).

$$P(\text{A}\cap\text{B})=P(\text{A/B})\times P(\text{B})$$

$$=\frac{2}{3}\times 0{,}05$$

$$=\frac{1}{30}$$

$$P(\text{B/A})=\frac{P(\text{A}\cap\text{B})}{P(\text{A})}$$

$$=\frac{\frac{1}{30}}{0{,}6}$$

$$=\frac{1}{18}$$

$P(\text{B/A})\approx 0{,}056$ (valeur arrondie au millième)

2°) **Bonus à ne traiter qu'à la fin s'il reste du temps et si tout le reste a été fait.**

Peut-on affirmer que dans ce pays, une femme risque davantage de développer la maladie M qu'un homme ? Justifier par le calcul.

On ne peut répondre par logique ; il faut faire un calcul.

Calculons $P(\text{B}/\overline{\text{A}})$

$$P(\text{B}/\overline{\text{A}})=\frac{P(\overline{\text{A}}\cap\text{B})}{P(\overline{\text{A}})}$$

On a : $P(\overline{\text{A}}/\text{B})=1-P(\text{A/B})=\frac{1}{3}$ (propriété des probabilités conditionnelles)

$$P(\text{B}/\overline{\text{A}})=\frac{P(\overline{\text{A}}/\text{B})\times P(\text{B})}{1-P(\text{A})}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 0{,}05}{0{,}4}$$

$$=\frac{1}{24}$$

On a : $\frac{1}{24}<\frac{1}{18}$ donc $P(\text{B/A})>P(\text{B}/\overline{\text{A}})$.

Donc dans ce pays, une femme risque davantage de développer la maladie M qu'un homme.
L'affirmation « dans ce pays, une femme risque davantage de développer la maladie M qu'un homme » est vraie.

III.

Barème : 2 points pour l'espérance et 2 points pour la variance (aucun point pour le tableau).

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X (probabilités sous forme décimale).

x_i	-2	3	8	18	48	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	0,94	0,025	0,02	0,0125	0,0025	Total $= 1$

Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X (valeur arrondie au centième).
La formule n'est pas demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

$E(\mathrm{X}) = -1,3$

$\sigma(\mathrm{X}) \approx 3,66$ (valeur arrondie au centième)

IV.

Barème : 1 point par question

1°) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % de la fréquence de personnes de cet échantillon aimant le chocolat. On donnera les bornes sous forme décimale.

2°) Lors du sondage, on observe que 750 personnes aiment le chocolat.
L'hypothèse « $p = 0,8$ » est-elle rejetée au seuil de risque de 5 % ? Expliquer.

1°) $\mathrm{I} = [0,775\,;\,0,824]$

2°) Lors du sondage, on constate que la fréquence des personnes aimant le chocolat dans l'échantillon est de $\frac{750}{1000}$ soit 0,75.
Cette fréquence n'appartient pas à I.
On rejette donc l'hypothèse au seuil de risque de 5 %.

Version sèche de deux exercices du contrôle

II.

On s'intéresse à une population pour laquelle on dispose des informations suivantes :

• 60 % sont des femmes ;

• 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie M et parmi celles-ci, les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.

Peut-on affirmer que dans ce pays, une femme risque davantage de développer la maladie M qu'un homme ?

IV.

Une publicité affirme que 80 % des Français aiment le chocolat. Un sondage à ce sujet est ensuite réalisé auprès de 1000 Français choisis au hasard.
On fait l'hypothèse que la proportion de Français aimant le chocolat est bien $p = 0,8$.
La population française est suffisamment nombreuse pour que l'on puisse assimiler le choix des 1000 sondés à une suite de tirages avec remise.
Lors du sondage, on observe que 750 personnes aiment le chocolat.

L'hypothèse « $p = 0,8$ » est-elle rejetée au seuil de risque de 5 % ? Expliquer.