1ère S1

Contrôle du vendredi 13 décembre 2013 (30 min)

Prénom : ……………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

Barème :

exercice	1	2	3	4	5	6
sur	1	4	3	3	3	6

1 On considère le système (I) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 4y^2 = 3 \end{cases}$. Un élève a utilisé un logiciel de calcul formel afin de le résoudre. Il a utilisé pour cela la commande « linsolve » qui permet de résoudre un système linéaire. Malheureusement, il obtient un affichage difficile à interpréter qui ne lui donne pas les solutions.
Pourquoi n'a-t-il pas obtenu les solutions ?

L'élève n'a pas obtenu les solutions du système (I) car ………………..

………..

………..

2 On s'intéresse à la résolution de l'inéquation $|x-1| \leqslant 2|x|$ (1).

1°) On étudie dans cette question une première méthode de résolution, présentée dans le cadre ci-dessous.

(1) est successivement équivalente à :

$|x-1|^2 \leqslant (2|x|)^2$ (1')

$(x-1)^2 \leqslant 4x^2$

$(x-1)^2 - 4x^2 \leqslant 0$

$[(x-1)-2x][(x-1)+2x] \leqslant 0$

$(-x-1)(3x-1) \leqslant 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S =$ ....

a) Pourquoi l'inéquation (1') est-elle équivalente à (1) ? Répondre par une phrase.

……

……

b) Compléter la dernière ligne.

2°) On étudie dans cette question une deuxième méthode de résolution, présentée dans le cadre ci-dessous.

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$ $\qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

On résout l'inéquation dans chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$, $]0\,;1]$, $]1\,;+\infty[$.

• Dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$, (1) est successivement équivalente à :

$1-x \leqslant -2x$

$x \leqslant -1$

L'ensemble S_1 des solutions de (1) dans $]-\infty\,;0]$ est $S_1 = \,]-\infty\,;-1]$.

• Dans l'intervalle $]0\,;1]$, (1) est successivement équivalente à :

$1-x \leqslant 2x$

$1 \leqslant 3x$

$x \geqslant \frac{1}{3}$

L'ensemble S_2 des solutions de (1) dans $]0\,;1]$ est $S_2 = \left[\frac{1}{3}\,;1\right]$.

• Dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$, (1) est successivement équivalente à :

$x-1 \leqslant 2x$

$-1 \leqslant x$

$x \geqslant -1$

L'ensemble S_3 des solutions de (1) dans $]1\,;+\infty[$ est $S_3 = \,]1\,;+\infty[$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{R}$ est $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =$ ....

Lire puis compléter la dernière ligne.

3°) Si l'on devait résoudre l'inéquation $|x-1| \leqslant 2|x|+1$, quelle méthode devrait-on adopter ? Répondre sans justifier.

On devrait adopter la méthode de la question … °).

3 On lance deux pièces de monnaie différentes et bien équilibrées.
Si l'on obtient le même côté, alors on gagne 2 €.
Sinon, on perd 1 €.

1°) On réalise 1000 simulations de cette expérience aléatoire sur tableur.
Le tableau ci-dessous donne les dix premières simulations, avec calcul du gain correspondant à chaque lancer.
Un gain positif correspond à une somme gagnée, un gain négatif à une somme perdue.
On décide que 0 correspond à pile et 1 à face.

	A	B	C
1	**Pièce 1**	**Pièce 2**	**Gain**
2	0	0	2
3	1	1	2
4	1	0	– 1
5	1	0	– 1
6	0	1	– 1
7	0	0	2
8	1	1	2
9	1	1	2
10	1	0	– 1
11	1	1	2

Compléter la formule de calcul que l'on a saisi dans la cellule A2 puis recopié dans la plage de cellules A2 : B1002 afin d'obtenir les résultats des lancers des deux pièces. On utilisera la fonction ALEA() du tableur qui donne un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[.

$= \text{ENT}(\text{..............................})$

Compléter la formule de calcul que l'on a saisi dans la cellule C2 puis recopié vers le bas jusqu'à la cellule C1002.

$= \text{SI}(\text{A2} = \text{B2} \, ; \, \text{........} \, ; \, \text{........})$

2°) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros.
Le jeu est-il équitable ? Justifier par un calcul (réponse en deux lignes : un calcul et une phrase).

……

……

4 On considère l'algorithme de gauche donné ci-contre. L'algorithme de droite sera complété à la question 2°).

1°) Pour quelles valeurs de x et y cet algorithme ne fonctionne-t-il pas ?

Cet algorithme ne fonctionne pas pour le couple $(x\,;\,y) = (.....\,;\,.....)$ saisi en entrée.

2°) Réécrire la partie « traitement » de cet algorithme pour qu'il affiche quelque chose en sortie pour toutes les valeurs de x et y.

3°) On sait que la valeur de x saisie en entrée est 1 et que la valeur affichée en sortie pour z est $\frac{1}{3}$.
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) en entrée pour y ?

…………………………………

Entrées :
Saisir x et y

Traitement :
a prend la valeur $x^2 + y^2$
z prend la valeur $\frac{1}{a}$

Sortie :
Afficher z

Entrées :
Saisir x et y

Traitement et sortie :

………………………………………..

………………………………………..

………………………………………..

………………………………………..

………………………………………..

5 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (un seul résultat ; calculs au brouillon).

1°) $f(x) = \frac{3x}{1-2x}$ $\qquad f'(x) = ...$

2°) $f(x) = (3x - x^2)^4$ $\qquad f'(x) = ...$

3°) $f(x) = 1 - \frac{3}{2x}$ $\qquad f'(x) = ...$

6 On considère la fonction $f : x \mapsto x - x^3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = ...$ (écrire une seule expression)

2°) On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Déterminer l'équation réduite de T.

………………………………..

3°) Compléter les phrases suivantes :

- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ………..………………. .

- $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -8x$ aux points d'abscisses ………..………………

Corrigé du contrôle du 13-12-2013

Les exercices $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ concernent des *études de cas* (études de situations rencontrées en classe ou lors de devoirs ; analyse de textes mathématiques).

$\boxed{1}$ On considère le système (I) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 4y^2 = 3 \end{cases}$. Un élève a utilisé un logiciel de calcul formel afin de le résoudre. Il a utilisé pour cela la commande « linsolve » qui permet de résoudre un système linéaire. Malheureusement, il obtient un affichage difficile à interpréter qui ne lui donne pas les solutions.
Pourquoi n'a-t-il pas obtenu les solutions ?

L'élève n'a pas obtenu les solutions du système (I) car **le système n'est pas un système linéaire**.

$\boxed{2}$ On s'intéresse à la résolution de l'inéquation $|x-1| \leqslant 2|x|$ (1).

1°) On étudie dans cette question une première méthode de résolution, présentée dans le cadre ci-dessous.

(1) est successivement équivalente à :

$|x-1|^2 \leqslant (2|x|)^2$ (1')

$(x-1)^2 \leqslant 4x^2$ (1")

$(x-1)^2 - 4x^2 \leqslant 0$

$[(x-1)-2x][(x-1)+2x] \leqslant 0$

$(-x-1)(3x-1) \leqslant 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $S = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

a) Pourquoi l'inéquation (1') est-elle équivalente à (1) ? Répondre par une phrase.

(1') est équivalente à (1) car les deux membres sont positifs ou nuls et la fonction « carrée » est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Compléter la dernière ligne.

2°) On étudie dans cette question une deuxième méthode de résolution, présentée dans le cadre ci-dessous.

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$ $\qquad$ $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

On résout l'inéquation dans chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$, $]0\,;1]$, $]1\,;+\infty[$.

- Dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$, (1) est successivement équivalente à :

$1-x \leqslant -2x$

$x \leqslant -1$

L'ensemble S_1 des solutions de (1) dans $]-\infty\,;0]$ est $S_1 = \,]-\infty\,;-1]$.

- Dans l'intervalle $]0\,;1]$, (1) est successivement équivalente à :

$1-x \leqslant 2x$

$1 \leqslant 3x$

$x \geqslant \frac{1}{3}$

L'ensemble S_2 des solutions de (1) dans $]0\,;1]$ est $S_2 = \left[\frac{1}{3}\,;1\right]$.

- Dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$, (1) est successivement équivalente à :

$x-1 \leqslant 2x$

$-1 \leqslant x$

$x \geqslant -1$

L'ensemble S_3 des solutions de (1) dans $]1\,;+\infty[$ est $S_3 = \,]1\,;+\infty[$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (1) dans $\mathbb{R}$ est $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

Lire puis compléter la dernière ligne.

3°) Si l'on devait résoudre l'inéquation $|x-1| \leqslant 2|x|+1$, quelle méthode devrait-on adopter ? Répondre sans justifier.

On devrait adopter la méthode de la question **2**°).

La méthode du 1°) ne donnerait rien. La méthode du 2°) est la seule méthode simple et efficace.
Cette méthode est basée sur la disjonction de cas.

$\boxed{3}$ On lance deux pièces de monnaie différentes et bien équilibrées.
Si l'on obtient le même côté, alors on gagne 2 €.
Sinon, on perd 1 €.

1°) On réalise 1000 simulations de cette expérience aléatoire sur tableur.
Le tableau ci-dessous donne les dix premières simulations, avec calcul du gain correspondant à chaque lancer.
Un gain positif correspond à une somme gagnée, un gain négatif à une somme perdue.
On décide que 0 correspond à pile et 1 à face.

	A	**B**	**C**
1	**Pièce 1**	**Pièce 2**	**Gain**
2	0	0	2
3	1	1	2
4	1	0	– 1
5	1	0	– 1
6	0	1	– 1
7	0	0	2
8	1	1	2
9	1	1	2
10	1	0	– 1
11	1	1	2

Compléter la formule de calcul que l'on a saisi dans la cellule A2 puis recopié dans la plage de cellules A2 : B1002 afin d'obtenir les résultats des lancers des deux pièces. On utilisera la fonction ALEA() du tableur qui donne un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[.

$$=\text{ENT}\left(2*\text{ALEA}(\ )\right)$$

ou (moins bon)

$$=\text{ENT}\left(\text{ALEA}(\ )+0,5\right)$$

Compléter la formule de calcul que l'on a saisi dans la cellule C2 puis recopié vers le bas jusqu'à la cellule C1002.

$$=\text{SI}\left(\text{A2}=\text{B2}\ ;\ 2\ ;\ -1\right)$$

On utilise la fonction logique SI du tableur. Lorsque la condition $\text{A2}=\text{B2}$ est vraie, alors le contenu de la cellule sera 2, sinon le contenu de la cellule sera – 1.

2°) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros.
Le jeu est-il équitable ? Justifier par un calcul (réponse en deux lignes : un calcul et une phrase).

$\text{E}(\text{X})=2\times\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
Donc le jeu n'est pas équitable.

Comme $\text{E}(\text{X})>0$, le jeu est à l'avantage du joueur.

$\boxed{4}$ On considère l'algorithme de gauche donné ci-contre. L'algorithme de droite sera complété à la question 2°).

1°) Pour quelles valeurs de *x* et *y* cet algorithme ne fonctionne-t-il pas ?

Cet algorithme ne fonctionne pas pour le couple $(x\ ;\ y)=(0\ ;\ 0)$ saisi en entrée.

2°) Réécrire la partie « traitement » de cet algorithme pour qu'il fonctionne pour toutes les valeurs de *x* et *y*.

3°) On sait que la valeur de *x* saisie en entrée est 1 et que la valeur affichée en sortie pour *z* est $\frac{1}{3}$.
Quelle(s) est (sont) la (les) valeur(s) possible(s) en entrée pour *y* ?

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

Entrées :
Saisir *x* et *y*

Traitement :
a prend la valeur x^2+y^2
z prend la valeur $\frac{1}{a}$

Sortie :
Afficher *z*

Entrées :
Saisir *x* et *y*

Traitement et sortie :
Si $x=0$ et $y=0$
  Alors afficher « impossible »
  Sinon *a* prend la valeur x^2+y^2
  z prend la valeur $\frac{1}{a}$
  Afficher *z*
FinSi

Entrées :
Saisir *x* et *y*

Traitement et sortie :
a prend la valeur x^2+y^2
Si $a=0$
  Alors afficher « impossible »
  Sinon *z* prend la valeur $\frac{1}{a}$
  Afficher *z*
FinSi

5 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (un seul résultat ; calculs au brouillon).

1°) $f(x)=\dfrac{3x}{1-2x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{3}{(1-2x)^2}$

2°) $f(x)=\left(3x-x^2\right)^4$ $\quad f'(x)=4(3-2x)\times\left(3x-x^2\right)^3$

3°) $f(x)=1-\dfrac{3}{2x}$ $\quad f'(x)=\dfrac{3}{2x^2}$

On vérifie tous ces résultats sur la calculatrice (attention à taper correctement l'expression de la fonction, il faut mettre toutes les parenthèses nécessaires).

Avec Symbolic, la calculatrice (modèle TI) donne une autre expression pour la dérivée :
$f'(x)=12\left(3x-x^2\right)^3-8\left(3x-x^2\right)^3\times x$.
L'expression n'est pas factorisée contrairement à l'expression obtenue par calcul « à la main » en appliquant la formule $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$.

6 On considère la fonction $f : x \mapsto x-x^3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=1-3x^2$ (écrire une seule expression)

2°) On note T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Déterminer l'équation réduite de T.

$y=-2x+2$

On vérifie ce résultat sur la calculatrice graphique.

3°) Compléter les phrases suivantes :

• $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

• $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-8x$ aux points d'abscisses $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Pour la première question, on résout l'équation $f'(x)=0$ (coefficient directeur égal à 0).

Pour la deuxième question, on résout l'équation $f'(x)=-8$ (coefficient directeur égal à – 8).

$-8=1-3x^2$

$-9=-3x^2$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$