1$^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le jeudi 12 décembre 2013

I. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On prendra un centimètre ou un « gros » carreau pour unité graphique.

1°) Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient $|\,xy\,|-|\,x\,|-|\,y\,|+1=0$.

2°) *Facultatif*

Déterminer et tracer l'ensemble *F* des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient $|\,xy\,|-|\,x\,|-|\,y\,|-1=0$.

II. Soit a, b, c trois réels non nuls.

On pose $S=\dfrac{a}{|\,a\,|}+\dfrac{b}{|\,b\,|}+\dfrac{c}{|\,c\,|}$.

Quelles sont les valeurs possibles de S lorsque (a, b, c) décrit $\left(\mathbb{R}^*\right)^3$?

Corrigé

I.

L'utilisation du logiciel XCas s'avère particulièrement judicieuse pour la recherche des ensembles E et F (tracé de courbes implicites).

1°) **Déterminons et traçons l'ensemble E des points M dont les coordonnées (x ; y) vérifient $|xy|-|x|-|y|+1=0$.**

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x ; y).

M $\in E$ si et seulement si $|xy|-|x|-|y|+1=0$

si et seulement si $|x|\times|y|-|x|-|y|+1=0$.

si et seulement si $|x|\times(|y|-1)+1-|y|=0$

si et seulement si $(|x|-1)\times(|y|-1)=0$

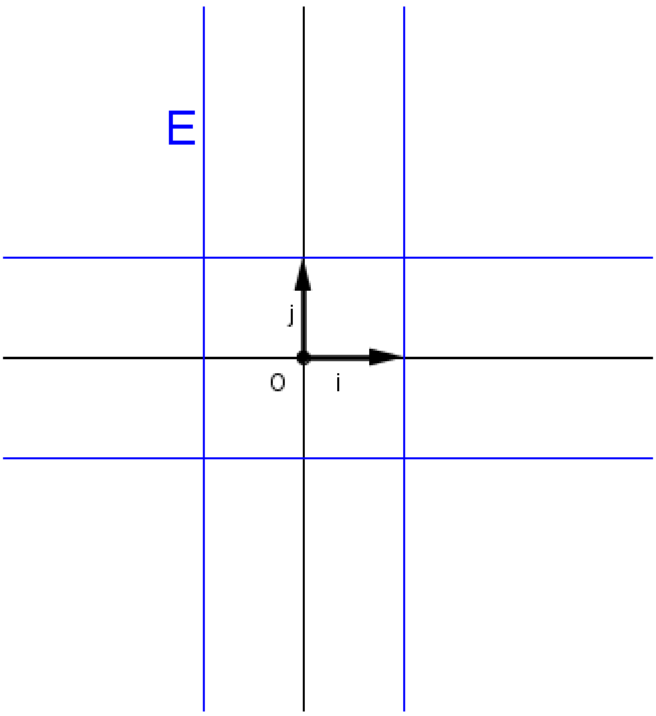
si et seulement si $|x|-1=0$ ou $|y|-1=0$

si et seulement si $|x|=1$ ou $|y|=1$

si et seulement si $x=1$ ou $x=-1$ ou $y=1$ ou $y=-1$

***E* est la réunion des droites d'équations $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$.**

On peut écrire $E=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ où D_1, D_2, D_3, D_4 sont les droites d'équations respectives $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$.



2°) **Déterminons et traçons l'ensemble F des points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient $|xy|-|x|-|y|-1=0$.**

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

M $\in F$ si et seulement si $|xy|-|x|-|y|-1=0$

si et seulement si $|x|\times|y|-|x|-|y|-1=0$.

si et seulement si $|y|\times(|x|-1)=|x|+1$

si et seulement si $|y|=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

Or le résultat d'une valeur absolue est toujours positive. On cherche donc le signe de $\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $\lvert x\rvert+1$		+	|	+	|	+	
SGN de $\lvert x\rvert-1$		+	0	−	0	+	
SGN de $\dfrac{\lvert x\rvert+1}{\lvert x\rvert-1}$		+	0	−	0	+	

$\dfrac{|x|+1}{|x|-1}>0$ pour $x\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

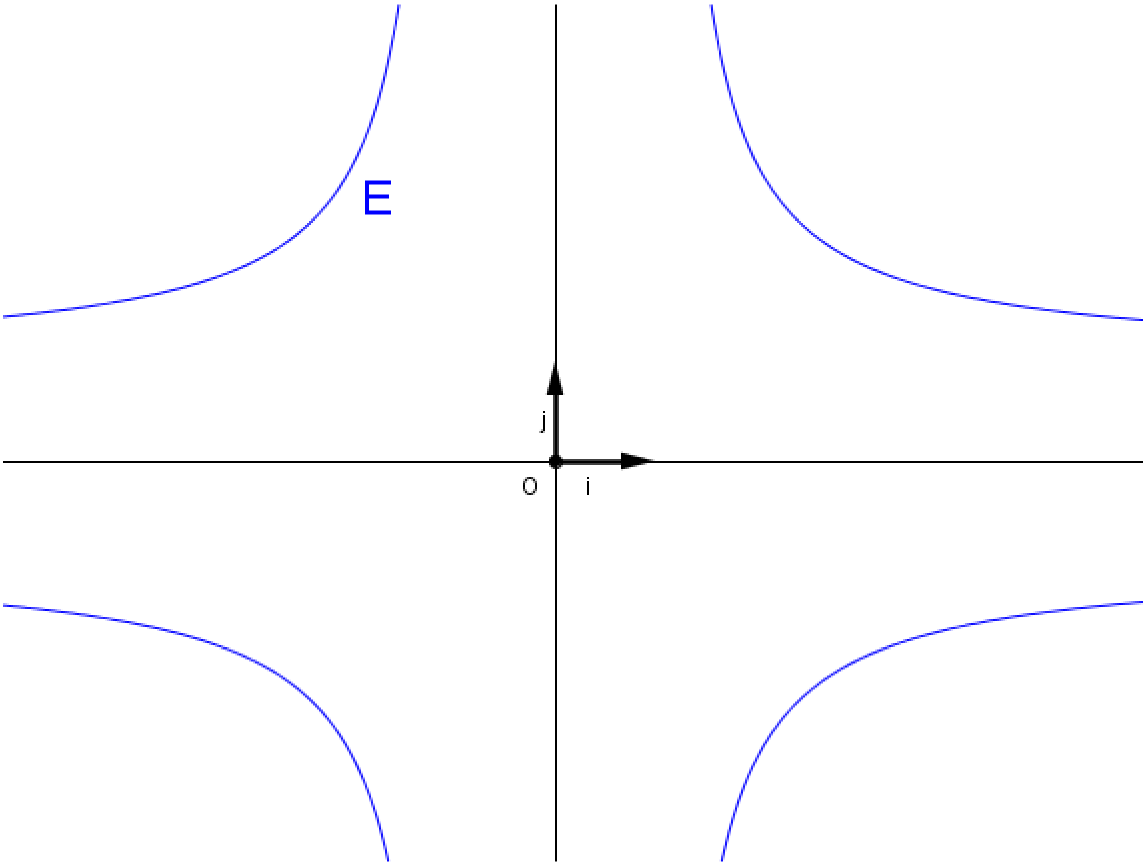
M $\in F$ si et seulement si $\begin{cases} y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1} \\ x>1 \text{ ou } x<-1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\dfrac{|x|+1}{|x|-1} \\ x>1 \text{ ou } x<-1\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{x-1} \\ x>1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=\dfrac{-x+1}{-x-1} \\ x<-1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\dfrac{x+1}{x-1} \\ x>1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\dfrac{-x+1}{-x-1} \\ x<-1\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{x-1} \\ x>1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=\dfrac{x-1}{x+1} \\ x<-1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\dfrac{x+1}{x-1} \\ x>1\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-\dfrac{x-1}{x+1} \\ x<-1\end{cases}$

***F* est la réunion de 4 morceaux de courbes (branches d'hyperboles).**

F admet l'origine pour centre de symétrie.



On trace les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$, $x \mapsto -\dfrac{x+1}{x-1}$, $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \mapsto -\dfrac{x-1}{x+1}$.

On repasse les « fragments » concernés.

II.

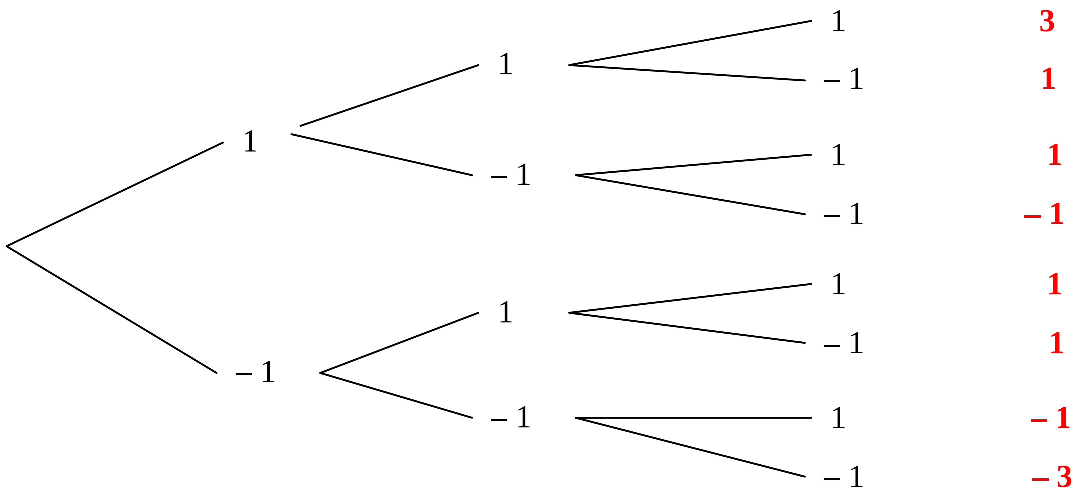
$$S = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} \qquad (a, b, c) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^3$$

Déterminons les valeurs possibles de S lorsque (a, b, c) décrit $\left(\mathbb{R}^*\right)^3$.

On commence par établir un « lemme »

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On peut dresser un arbre.



Donc les valeurs possibles de S lorsque (a, b, c) décrit $\left(\mathbb{R}^*\right)^3$ sont **3, 1, – 1 et – 3**.