1ère S1

Contrôle du vendredi 6 décembre 2013 (30 min)

Prénom : ……………………………………………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

Barème :

exercice	1	2	3	4	5	6	7	8
sur	1	2	4	5	3	3	1	1

1 Déterminer la valeur exacte du rayon r en centimètres d'une boule fermée de volume $20\ \text{cm}^3$.

$r =$ .... (écrire un seul résultat sans détailler les calculs)

2 Voici un exemple de résolution de l'équation $|x-1| = 2|x|$ (1).
La résolution est correcte ; il est inutile de la vérifier (il ne faut pas faire de calcul).

(1) est successivement équivalente à :

$|x-1|^2 = \left(2|x|\right)^2$ (1')

$(x-1)^2 = 4x^2$ (1")

$(x-1)^2 - 4x^2 = 0$

$\left[(x-1)-2x\right]\left[(x-1)+2x\right] = 0$

$(-x-1)(3x-1) = 0$

$x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

Les solutions de l'équation (1) sont – 1 et $\dfrac{1}{3}$.

1°) Pourquoi l'équation (1') est-elle équivalente à (1) ? Répondre par une phrase.

……

……

2°) Quelle propriété a été utilisée pour écrire l'équation (1") (plus précisément pour faire disparaître les barres de valeur absolue) ? Formuler cette propriété sous la forme d'une égalité quantifiée sans faire de phrase (quantification à l'aide du quantificateur « $\forall a \in \mathbb{R}$ ………. » ou quantification en français

« Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ ………. »).

……

3 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthogonal, on note E l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

1°) On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes d'équations respectives $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Que peut-on dire de ces deux courbes l'une par rapport à l'autre ?(comment peut-on obtenir $\mathcal{C}'$ à partir de $\mathcal{C}$?)

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont ……………………………………………………………………………………… .

2°) Lire le raisonnement suivant par chaîne d'équivalences :

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

M $\in E$ si et seulement si $\left(x^2+1\right)y^2 \leqslant 1$ (1)

si et seulement si $y^2 \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$ (2)

si et seulement si $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Expliquer par une phrase le passage entre les inégalités (1) et (2) mentionné par une flèche.

……

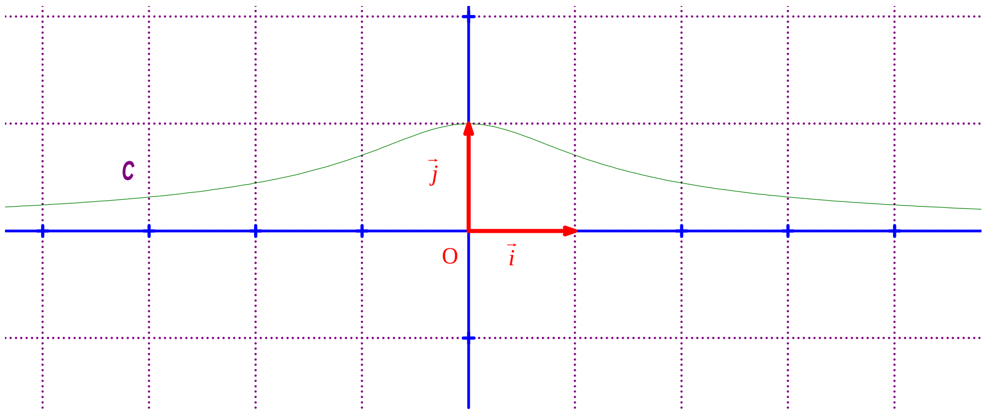
……

3°) En déduire l'ensemble E à l'aide d'une phrase (on ne parlera pas de point M dans cette phrase).

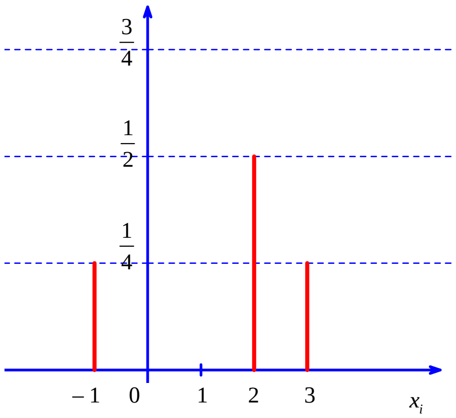
L'ensemble E est le domaine ……………………………………………………………………………………

……

Hachurer E sur le graphique ci-dessous.



4 On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) dont la loi de probabilité est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.



x_i			
$P(X = x_i)$			

$E(X) = ...$

$\sigma(X) = ...$

1°) Compléter le tableau de la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X (valeurs exactes).
3°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. On rappelle que F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$. On cherche l'expression de F en fonction de x.
On donne le début de la démarche. Compléter les pointillés.

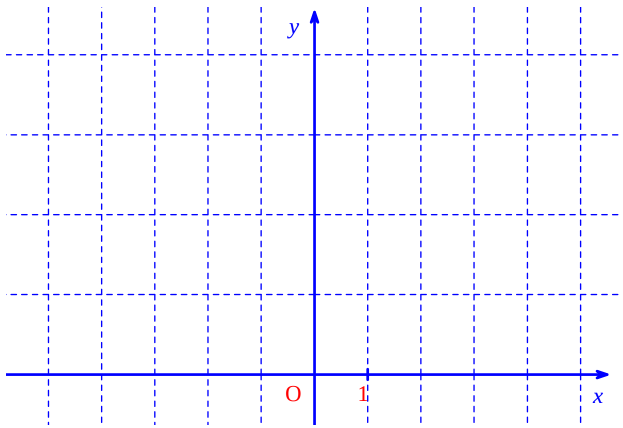
- Si $x < -1$, $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$.

- Si $-1 \leqslant x < 2$, $F(x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$.

- Si …… $\leqslant x <$ …… , $F(x) = P(X = ...) + P(X = ...) = ... + ... = ...$

- Si $x \geqslant$ ……, $F(x) = ...$.

Tracer la représentation graphique de F dans le repère d'origine O sur le graphique ci-dessous.
On fera attention à être précis sur les points d'arrêt.



5 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$.

Compléter l'égalité en donnant l'expression simplifiée : $\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = ...$ $(h \neq 0)$.

Lorsque h tend vers 0 sans jamais être égal à 0, $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ tend vers ……… .
On en déduit que f est dérivable en …… et que le nombre dérivé de f en …… est égal à ……… .

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur ……… .

6 On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{2+x}{x}$.

Compléter l'égalité en donnant l'expression simplifiée : $\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = ...$ $(h \neq 0 \text{ et } h \neq 1)$.

Lorsque h tend vers 0 sans jamais être égal à 0, $\frac{g(-1+h) - g(-1)}{h}$ tend vers ……… .
On en déduit que g est dérivable en …… et que le nombre dérivé de g en …… est égal à ……… .
On note $\mathcal{C}$ ' la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}$ ' au point d'abscisse – 1 a pour coefficient directeur ……… .

7 À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre dérivé de la fonction $h : x \mapsto 3 - 2\sqrt{x}$ en 1.

Le nombre dérivé de h en 1 est égal à ……… .

8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x) = E(6x+1)$ où $E(a)$ désigne la partie entière du réel a.
On démontre aisément que f est à valeurs dans $S = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ comme le montre le raisonnement suivant.

Si $0 \leqslant x < 1$, alors $1 \leqslant 6x+1 < 7$ donc, par définition de la partie entière, $f(x) \in S$.

On cherche à définir plus précisément l'image par f d'un réel x quelconque de [0 ; 1[en procédant par cas.

- Si $0 \leqslant x < \frac{1}{6}$, alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

- Si $\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{2}{6}$, alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

- Si $\frac{2}{6} \leqslant x < \frac{3}{6}$, alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

- Si …. $\leqslant x <$ …., alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

- Si …. $\leqslant x <$ …., alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

- Si …. $\leqslant x <$ …., alors ….. $\leqslant 6x+1 <$ ….. d'où $f(x) = ...$

Corrigé du contrôle du 6-12-2013

1 Déterminer la valeur exacte du rayon r en centimètres d'une boule fermée de volume $20\ \text{cm}^3$.

Le volume d'une boule de rayon R est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

$$r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$$

Remarque d'écriture : le radical doit être assez grand (« descendre » assez bas) pour englober tout le quotient.

2 Voici un exemple de résolution de l'équation $|x-1| = 2|x|$ (1).
La résolution est correcte ; il est inutile de la vérifier.

(1) est successivement équivalente à :

$|x-1|^2 = \left(2|x|\right)^2$ (1')

$(x-1)^2 = 4x^2$ (1")

$(x-1)^2 - 4x^2 = 0$

$\left[(x-1)-2x\right]\left[(x-1)+2x\right] = 0$

$(-x-1)(3x-1) = 0$

$x = -1$ ou $x = \frac{1}{3}$

Les solutions de l'équation (1) sont -1 et $\frac{1}{3}$.

1°) Pourquoi l'équation (1') est-elle équivalente à (1) ? Répondre par une phrase.

Les deux membres sont positifs ou nuls (cela resterait valable si les deux membres étaient de même signe).
On s'appuie sur la règle valable pour x et y positifs ou nuls :

$$x^2 = y^2 \text{ si et seulement si } x = y.$$

2°) Quelle propriété a été utilisée pour écrire l'équation (1") (plus précisément pour faire disparaître les barres de valeur absolue) ? Formuler cette propriété sous la forme d'une égalité quantifiée sans faire de phrase (quantification à l'aide du quantificateur « $\forall a \in \mathbb{R}$ ……….. » ou quantification en français « Quel que soit $a \in \mathbb{R}$ ……….. »).

$$\forall a \in \mathbb{R}\ |a|^2 = a^2$$

3 Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthogonal, on note E l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

1°) On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes d'équations respectives $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Que peut-on dire de ces deux courbes l'une par rapport à l'autre ?(comment peut-on obtenir $\mathcal{C}'$ à partir de $\mathcal{C}$?)

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

On utilise l'hypothèse disant que le repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est orthogonal.

On ne dit pas que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont « opposées » comme certains élèves l'ont écrit.

2°) Lire le raisonnement suivant par chaîne d'équivalences :

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

M $\in E$ si et seulement si $\left(x^2+1\right)y^2 \leqslant 1$ (1)

si et seulement si $y^2 \leqslant \frac{1}{x^2+1}$ (2)

si et seulement si $-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Expliquer par une phrase le passage entre les inégalités (1) et (2) mentionné par une flèche.

On divise les deux membres de l'inégalité (1) par x^2+1 qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas.

On multiplie les deux membres de l'inégalité (1) par $\frac{1}{x^2+1}$ qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas.

On multiplie chaque membre de l'inégalité (1) par $\frac{1}{x^2+1}$; le sens de l'inégalité est conservé car $\frac{1}{x^2+1} > 0$.

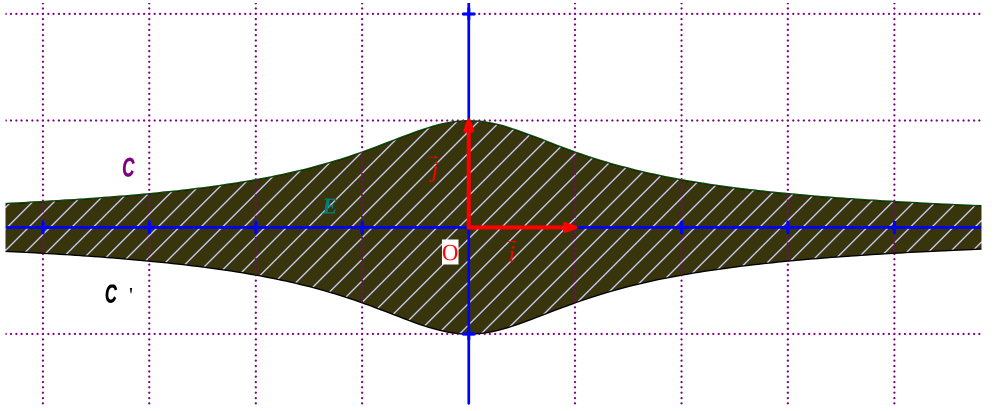
3°) En déduire l'ensemble E à l'aide d'une phrase (on ne parlera pas de point M dans cette phrase).

L'ensemble E est le domaine limité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (frontières comprises*).

L'ensemble E est le domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (frontières comprises).

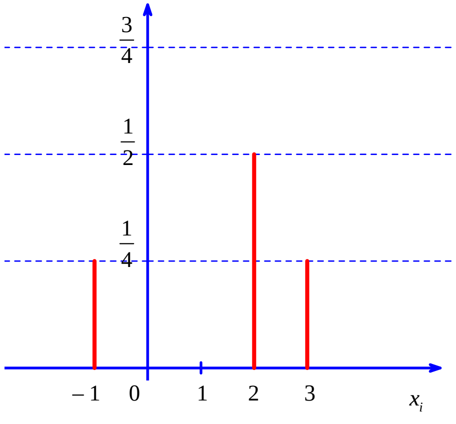
* Cela signifie que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont incluses dans E.

Hachurer E sur le graphique ci-dessous.



On trace la courbe $\mathcal{C}$ ', symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

$\boxed{4}$ On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) dont la loi de probabilité est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.



x_i	-1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \frac{3}{2}$

$\sigma(X) = \frac{3}{2}$

1°) Compléter le tableau de la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

On observe que l'écart-type de X est égale à la variance.

3°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. On rappelle que F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(X \leqslant x)$. On cherche l'expression de F en fonction de x.
On donne le début de la démarche. Compléter les pointillés.

• Si $x < -1$, $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$.

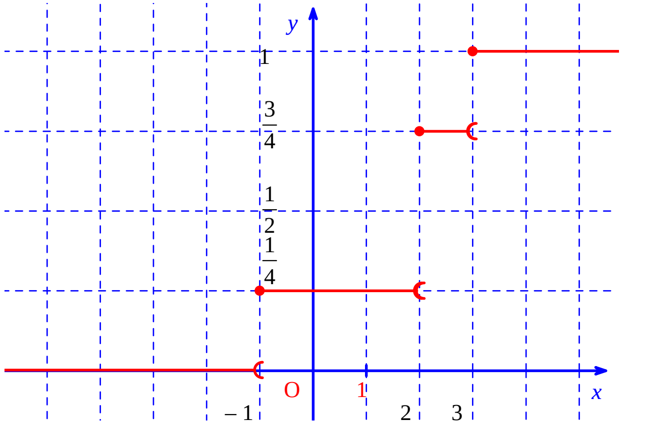
• Si $-1 \leqslant x < 2$, $F(x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$.

• Si $2 \leqslant x < 3$, $F(x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

• Si $x \geqslant 3$, $F(x) = P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$ (aucun calcul).

Tracer la représentation graphique de F dans le repère d'origine O sur le graphique ci-dessous.
On fera attention à être précis sur les points d'arrêt.

La fonction F est une fonction constante par intervalles (ou « en escalier »).
Elle est représentée par des demi-droites et des segments de droites.



$\boxed{5}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$.

Compléter l'égalité en donnant l'expression simplifiée : $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = 2h + 13 \quad (h \neq 0)$.

Lorsque h tend vers 0 sans jamais être égal à 0, $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$ tend vers 13.

On en déduit que f est dérivable en 4 et que le nombre dérivé de f en 4 est égal à 13.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur 13.

On vérifie le résultat avec la calculatrice.

Détail de deux calculs :

$f(4)=25$; $f(4+h)=2h^2+13h+25$

6 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2+x}{x}$.

Compléter l'égalité en donnant l'expression simplifiée : $\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=\dfrac{2}{h-1}$ $(h\neq 0 \text{ et } h\neq 1)$.

Lorsque h tend vers 0 sans jamais être égal à 0, $\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$ tend vers – 2.

On en déduit que g est dérivable en – 1 et que le nombre dérivé de g en – 1 est égal à – 2.
On note $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}'$ au point d'abscisse – 1 a pour coefficient directeur – 2.

On vérifie le résultat avec la calculatrice.

Détail de deux calculs :

$g(-1)=-1$; $g(-1+h)=\dfrac{1+h}{-1+h}$

7 À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre dérivé de la fonction $h : x \mapsto 3-2\sqrt{x}$ en 1.

Le nombre dérivé de h en 1 est égal à – 1.

Sur calculatrice TI 83 Plus, on obtient l'affichage – 1,000000125.
La calculatrice « beugue » (dysfonctionne, pour employer un meilleur terme mais dépourvu de connotation informatique). Les trois dernières décimales sont erronées.

8 On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x)=\mathrm{E}(6x+1)$ où $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière du réel a.
On démontre aisément que f est à valeurs dans $S=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ comme le montre le raisonnement suivant.

Si $0 \leqslant x < 1$, alors $1 \leqslant 6x+1 < 7$ donc, par définition de la partie entière, $f(x)\in S$.

On cherche à définir plus précisément l'image d'un réel x quelconque de [0 ; 1[en procédant par cas.

- Si $0 \leqslant x < \frac{1}{6}$, alors $1 \leqslant 6x+1 < 2$ d'où $f(x)=1$.
- Si $\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{2}{6}$, alors $2 \leqslant 6x+1 < 3$ d'où $f(x)=2$.
- Si $\frac{2}{6} \leqslant x < \frac{3}{6}$, alors $3 \leqslant 6x+1 < 4$ d'où $f(x)=3$.
- Si $\frac{3}{6} \leqslant x < \frac{4}{6}$, alors $4 \leqslant 6x+1 < 5$ d'où $f(x)=4$.
- Si $\frac{4}{6} \leqslant x < \frac{5}{6}$, alors $5 \leqslant 6x+1 < 6$ d'où $f(x)=5$.
- Si $\frac{5}{6} \leqslant x < 1$, alors $6 \leqslant 6x+1 < 7$ d'où $f(x)=6$.

Ce travail montre que :

- l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{6}\right[$ est envoyé sur 1 ;
- l'intervalle $\left[\frac{1}{6} ; \frac{2}{6}\right[$ est envoyé sur 2 ;
- l'intervalle $\left[\frac{2}{6} ; \frac{3}{6}\right[$ est envoyé sur 3

etc.

On comprend également mieux pourquoi quand on rentre la formule $=\mathrm{ENT}(6*\mathrm{ALEA}(\ )+1)$ on obtient des chiffres aléatoires parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, chacun de ces chiffres apparaissant avec une fréquence théorique de $\frac{1}{6}$.

Version sèche de quelques exercices :

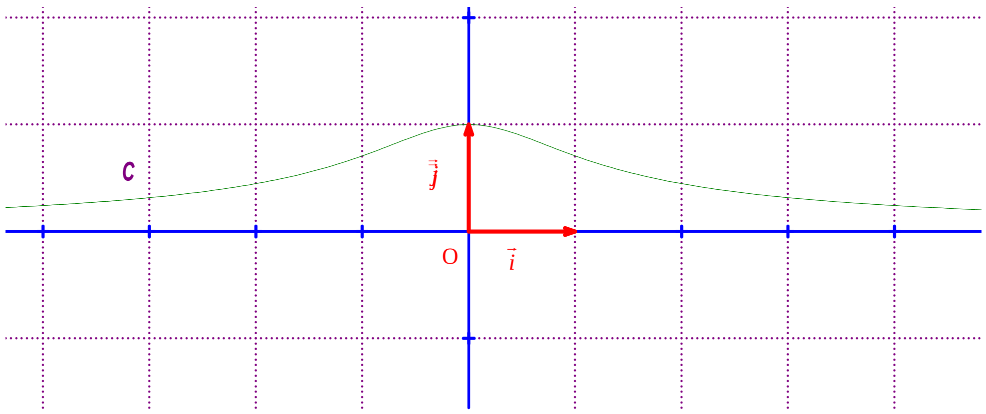
$\boxed{3}$ Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthogonal, on note E l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

1°) On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les courbes d'équations respectives $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

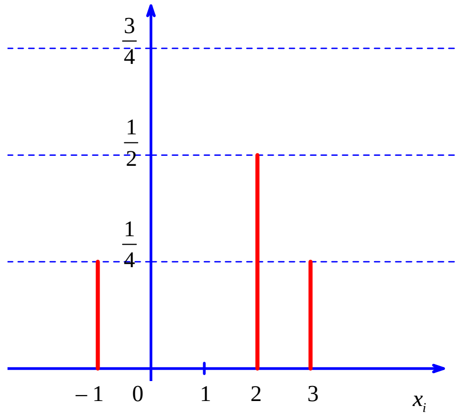
Que peut-on dire de ces deux courbes l'une par rapport à l'autre ?

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont ……………………………………………………………………………………………… .

2°) Déterminer et hachurer l'ensemble E sur le graphique ci-dessous.



$\boxed{4}$ On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P) dont la loi de probabilité est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous.



1°) Déterminer la loi de probabilité de X.
2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X (valeurs exactes).
3°) On note F la fonction de répartition de la variables aléatoire X. Déterminer l'expression de F en fonction de x puis tracer sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

$\boxed{5}$ On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$.
1°) Démontrer que f est dérivable en 4 et calculer le nombre dérivé de f en 4.
2°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4.

$\boxed{6}$ On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2+x}{x}$.
1°) Démontrer que g est dérivable en – 1 et calculer le nombre dérivé de g en – 1.
2°) On note $\mathcal{C}$ ' la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ ' au point d'abscisse – 1.

$\boxed{8}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par $f(x) = \mathrm{E}(6x+1)$ où $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière du réel a.
Déterminer la valeur de $f(x)$ suivant les valeurs de x.