TS spécialité

Contrôle du jeudi 28 novembre 2013 (50 min)

Prénom : …………………………………… Nom : …………………………………… **/20**

I. (4 points)

1°) Soit *a*, *b*, *k* trois entiers relatifs. Démontrer en rédigeant avec soin que $\mathbf{D}(a\,;b)=\mathbf{D}(a-kb\,;b)$.

2°) En déduire que si *b* est non nul, on a $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(a-kb\,;b)$.

Ce résultat pourra être utilisé dans les exercices du contrôle.

II. (4 points)

Soit *n* un entier naturel. On pose $a=4n+3$ et $b=5n+2$.

1°) Démontrer que si *d* est un entier naturel qui divise *a* et *b* alors *d* divise 7.

2°) Déterminer le PGCD de *a* et *b* suivant les valeurs de *n*.

III. (4 points)

Soit n un entier relatif. Déterminer le PGCD de $3n+4$ et de $n+1$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

IV. (4 points)

L'application de l'algorithme d'Euclide aux entiers a et b a donné lieu à l'écriture ci-contre, où on ne connaît que les quotients successifs et le résultat intermédiaire 6.
Calculer a et b (recherche au brouillon ; ne rien écrire dans le cadre).

$a = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\quad$ $b = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$a = b \times 4 + \ldots$$
$$\ldots = \ldots \times 2 + \ldots$$
$$6 = \ldots \times 2$$

Recopier alors et compléter l'algorithme d'Euclide (en n'utilisant que des nombres) :

…………………………….

…………………………….

…………………………….

V. (4 points)

Soit n un entier relatif.

1°) Déterminer $\text{PGCD}(n+1\,;n-1)$ suivant les valeurs de n.

2°) On pose $\text{A} = n^2 + 7n + 6$ et $\text{B} = n^2 + 5n - 6$. Déterminer $\text{PGCD}(\text{A}\,;\text{B})$ suivant les valeurs de n.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 28-11-2013

I. Question de cours (démonstration du lemme d'Euclide)

1°) Soit a, b, k trois entiers relatifs.

Démontrer en rédigeant avec soin que $\mathbf{D}(a\,;b)=\mathbf{D}(a-kb\,;b)$.

Il s'agit de démontrer une égalité d'ensembles.
On procède par double inclusion.

• On démontre d'abord que $\mathbf{D}(a\,;b)\subset\mathbf{D}(a-kb\,;b)$.

Soit d un diviseur commun à a et b.

d divise toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers donc $d \mid a-kb$.
Par conséquent, d est un diviseur commun à $a-kb$ et b.
On en conclut que $\mathbf{D}(a\,;b)\subset\mathbf{D}(a-kb\,;b)$ (1).

• On démontre ensuite que $\mathbf{D}(a-kb\,;b)\subset\mathbf{D}(a\,;b)$.

Soit d est un diviseur commun à $a-kb$ et b.

d divise toute combinaison linéaire de $a-kb$ et b à coefficients entiers donc $d \mid (a-kb)+kb$ d'où $d \mid a$.
Par conséquent, d est un diviseur commun à a et b.
On en conclut $\mathbf{D}(a-kb\,;b)\subset\mathbf{D}(a\,;b)$ (2).

Grâce à (1) et (2), on conclut que $\mathbf{D}(a\,;b)=\mathbf{D}(a-kb\,;b)$.

2°) **En déduire que si b est non nul, on a $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(a-kb\,;b)$.**
Ce résultat pourra être utilisé dans les exercices du contrôle.

Par définition,
- le PGCD de a et b est le plus grand élément de $\mathbf{D}(a\,;b)$;
- le PGCD de $a-kb$ et b est le plus grand élément de $\mathbf{D}(a\,;b)=\mathbf{D}(a-kb\,;b)$.

Comme $\mathbf{D}(a\,;b)=\mathbf{D}(a-kb\,;b)$, on a : $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(a-kb\,;b)$.

II.

Soit n un entier naturel. On pose $a=4n+3$ et $b=5n+2$.

1°) **Démontrer que si d est un entier naturel qui divise a et b alors d divise 7.**

Soit d un entier naturel tel que $d \mid a$ et $d \mid b$.

On a alors $d \mid 5a-4b$ soit $d \mid 7$.

2°) **Déterminer le PGCD de a et b suivant les valeurs de n.**

D'après la question précédente, si d est un entier naturel qui divise a et b, alors d divise 7.
Donc $d=1$ ou $d=7$.

Or le PGCD de a et b est un diviseur commun positif à a et b.
Donc $\text{PGCD}(a\,;b)=1$ ou $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.

Utilisons les congruences modulo 7 pour déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de a et b.

n est congru modulo 7 à	0	1	2	3	4	5	6
a est congru modulo 7 à	3	0	4	1	5	2	6
b est congru modulo 7 à	2	0	5	3	1	6	4

• Lorsque $n\equiv 1$ [7], a et b sont tous les deux divisibles par 7 ; $\text{PGCD}(a\,;b)=7$.

• Lorsque n n'est pas congru à 1 modulo 7, $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

III.

Soit n un entier relatif. Déterminer le PGCD de $3n+4$ et de $n+1$.

1ère méthode :

Soit d un entier naturel tel que $d \mid a$ et $d \mid b$.

On a alors $d \mid a-3b$ soit $d \mid 1$.
Le seul diviseur entier naturel de 1 est 1 donc $d=1$.
On en déduit que $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.
Autrement dit, a et b sont premiers entre eux.

2e méthode :
On a : $3n+4=3(n+1)+1$ donc d'après le lemme d'Euclide, $\text{PGCD}(a\,;b)=\text{PGCD}(n+1\,;1)$.
Or $\text{PGCD}(n+1\,;1)=1$ donc $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

3e méthode :

On a : $1\times(3n+4)-3(n+1)=3n+4-3n-3=1$.
Comme -3 et 1 sont des entiers relatifs, d'après le théorème de Bezout (sens facile), $3n+4$ et $n+1$ sont premiers entre eux d'où $\text{PGCD}(a\,;b)=1$.

IV.

L'application de l'algorithme d'Euclide aux entiers a et b a donné lieu à l'écriture ci-contre, où on ne connaît que les quotients successifs et le résultat intermédiaire 6.
Calculer *a* et *b* (recherche au brouillon ; ne rien écrire dans le cadre).

$a=$.......... $b=$..........

$a=b\times 4+\ldots$

$\ldots=\ldots\times 2+\ldots$

$6=\ldots\times 2$

Recopier alors et compléter l'algorithme d'Euclide (en n'utilisant que des nombres) :

$66=15\times 4+6$

$15=6\times 2+3$

$6=3\times 2$

V.

Soit n un entier relatif.

1°) **Déterminer PGCD(n + 1 ; n – 1) suivant les valeurs de n.**

Soit d un diviseur positif commun à $n+1$ et à $n-1$.

On a : $d\mid n+1$ et $d\mid n-1$.

Donc $d\mid n+1-(n-1)$ soit $d\mid 2$.

Par suite, $d=1$ ou $d=2$.

- Si n est impair, alors $n+1$ et à $n-1$ sont divisibles par 2 donc $\text{PGCD}(n+1\,;n-1)=2$.

- Si n est pair, alors $n+1$ et à $n-1$ ne sont pas divisibles par 2 donc $\text{PGCD}(n+1\,;n-1)=1$.

2°) On pose $\text{A}=n^2+7n+6$ et $\text{B}=n^2+5n-6$.

Déterminer PGCD (A ; B) suivant les valeurs de n.

On a : $\text{A}=(n+1)(n+6)$ et $\text{B}=(n+1)(n-6)$.

Donc $\text{PGCD}(\text{A}\,;\text{B})=\text{PGCD}\big((n+1)(n+6)\,;(n-1)(n+6)\big)=(n+6)\text{PGCD}(n+1\,;n-1)$

- Si n est impair, alors $\text{PGCD}(n+1\,;n-1)=2$ donc $\text{PGCD}(\text{A}\,;\text{B})=2(n+6)$.

- Si n est pair, alors $\text{PGCD}(n+1\,;n-1)=1$ donc $\text{PGCD}(\text{A}\,;\text{B})=n+6$.