

## Fiche méthode sur le calcul d'un nombre dérivé

Voir ex. **1** nombre dérivé (3) j'explique des étapes

On utilise l'expression de la fonction de départ.

Le 5-12-2015, j'ai noté « Avec l'expression de la fonction de départ, on peut calculer  $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ . »

On exprime le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  c'est-à-dire le quotient  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  en fonction de  $h$ .

Pour cela, on effectue séparément les calculs.

Avec l'expression de  $f$  donnée au départ, on commence par calculer  $f(a)$ .

Avec l'expression de  $f$  donnée au départ, on exprime ensuite  $f(a+h)$  en fonction de  $h$ .

On s'arrange pour avoir un résultat sous forme simplifiée [il faut bien savoir quand on arrête : forme développée réduite, forme d'un quotient...].

Avec les deux résultats précédents, on calcule ensuite  $f(a+h)-f(a)$  puis  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  sous forme simplifiée (c'est-à-dire sous une forme où le  $h$  du dénominateur s'est « évanoui »).

On cherche la limite de  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  quand  $h$  tend vers 0 en remplaçant  $h$  par 0 dans l'expression simplifiée.

### Introduction :

Nous poursuivons l'étude des tangentes en procédant par petites touches.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion de nombre dérivé d'une fonction en lien avec la notion de tangente.

Dans ce chapitre, nous allons reprendre cette notion en gardant toujours à l'esprit notre axe de travail principal sur plusieurs chapitres, à savoir la tangente à une courbe.

L'objectif va être :

- d'améliorer la définition du nombre dérivé d'une fonction ;

- de mettre en pratique la définition du nombre dérivé d'une fonction sur des exemples numériques (calculs de nombres dérivés).

Dans ce chapitre, nous allons donc aborder l'aspect calcul.

### Question de Jeanne Valcin le 1-12-2015

« Est-ce qu'il y a des courbes pour lesquelles on ne peut pas tracer de tangente ? »

Moi : « Oui, je pense à un exemple (fonction indicatrice des rationnels).

J'aurais dû d'abord dire qu'il faut une condition nécessaire indispensable : fonction doit être continue (tracé continu, c'est-à-dire sans lever le crayon).

## Plan du chapitre

### I. Exemple

..... a pour but d'introduire un nouveau vocabulaire

### II. Nombre dérivé d'une fonction

..... a pour but de donner la définition améliorée du nombre dérivé

### III. Calcul d'un nombre dérivé

..... a pour but de donner un exemple de calcul de nombre dérivé à la main

### IV. Retour sur la notion de « tendre vers »

..... a pour but de préciser quelques notions

### V. Cas de non dérivabilité

..... a pour but de donner des exemples de fonctions non dérivables

### VI. Écriture symbolique

..... a pour but de donner de donner une notation pratique

## I. Exemple

On reprend l'exemple déjà étudié dans les deux chapitres précédents. Nous allons pousser la modélisation.

### 1°) Notations

On note  $\mathcal{C}$  la courbe de la fonction  $f: x \mapsto x^2$  (« fonction carré ») dans un repère.

On s'intéresse à la tangente au point A de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 1.

### 2°) Étude

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ (point fixe)} \quad M \begin{vmatrix} 1+h \\ (1+h)^2 \end{vmatrix} \text{ avec } h \neq 0 \text{ (point mobile)}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu que le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à  $2+h$  (après simplification).

Cette formule donne le coefficient directeur de n'importe quelle droite (AM) c'est-à-dire que l'on peut remplacer  $h$  par n'importe quel réel non nul (par 1, -2 etc.). Ce n'est cependant pas cela qui nous intéresse dans ce chapitre.

Nous avons alors dit que lorsque  $h$  se rapproche de plus en plus de 0,  $2+h$  se rapproche de plus en plus du nombre  $L=2$ .

Plutôt que de dire « lorsque  $h$  se rapproche de 0,  $2+h$  se rapproche du nombre  $L=2$  », nous allons dire que : « lorsque  $h$  tend vers 0 (sans jamais être égal à 0),  $2+h$  tend vers  $L=2$  ».

### 3°) Commentaires

La notion de « tendre vers » résout le problème où A et M sont confondus.

En effet, lorsque A et M sont confondus, la droite (AM) n'existe pas.

Néanmoins, la droite (AM) va se rapprocher de la droite  $T$  passant par A et de coefficient directeur 2 qui est la tangente.

Plutôt que de dire que «  $h$  tend vers 0 », nous pourrions aussi dire que «  $h$  devient infiniment proche de 0 », pour employer un langage proche de celui de Leibniz.

## II. Nombre dérivé d'une fonction

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre la définition vue dans le chapitre précédent en la formulant de manière plus précise.

On se place dans un cadre général où l'expression de  $f$  n'est pas connue.

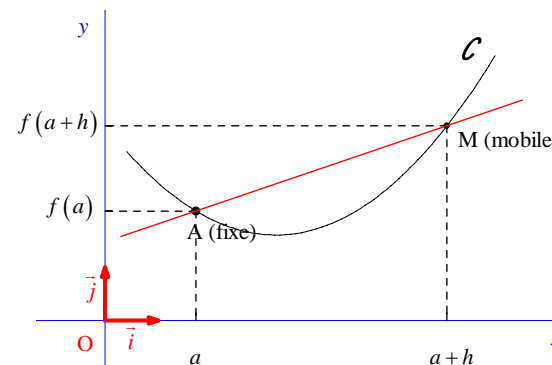
### 1°) Notations

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère.

A est un point fixe de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $a$  ( $a \in I$ ).

M est un point variable de  $\mathcal{C}$  distinct de A.



La droite (AM) a pour coefficient directeur  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ , appelé rapport de Newton en  $a$  ou taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  dans le chapitre précédent.

### 2°) Définition améliorée du nombre dérivé

Dans les situations que nous rencontrerons dans ce chapitre, le rapport  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  (écrit sous forme simplifiée) tend vers un nombre  $L$  lorsque  $h$  tend vers 0.

On dit alors que :

- la fonction  $f$  est « **dérivable** » en  $a$  ;
- le nombre  $L$  est le « **nombre dérivé** » de  $f$  en  $a$ .

### 3°) Remarques

- Cette définition doit être sue par cœur.
- Cette définition sera encore reprise dans le chapitre suivant.
- Le nombre  $L$  « correspond » au coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse  $a$ .

### 4°) Utilisation

Cette définition est opérationnelle.

Elle permet de déterminer le nombre dérivé d'une fonction en un réel lorsque l'on connaît l'expression de la fonction, comme nous allons le voir sur un exemple numérique dans le paragraphe suivant.

Elle permet de démontrer des propriétés comme nous le verrons ultérieurement.

## 5°) Applications

La connaissance du nombre dérivé va nous permettre de définir la tangente avec précision. C'est pour nous la grande application pour l'instant.

Nous verrons plus tard que le concept de nombre dérivé va permettre de définir une nouvelle fonction, appelée *fonction dérivée*, qui va jouer un très grand rôle. En effet, nous verrons que l'étude du signe de cette fonction dérivée permettra de connaître les variations de la fonction de départ.

## 6°) Rappel

Du point de vue graphique, avec les notations suivantes :

-  $\mathcal{C}$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère ;

- A désigne le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $a$  ;

- M désigne le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $a+h$  ;

- le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  c'est-à-dire le quotient  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  est le coefficient directeur de la droite (AM) ;
- le nombre L est le coefficient directeur de la tangente T à  $\mathcal{C}$  au point A.

Il est essentiel d'avoir toujours en tête ces deux points pour ne pas confondre les deux notions.

## III. Calcul d'un nombre dérivé

### 1°) Introduction

Nous allons utiliser la définition pour déterminer par calcul (« à la main ») le nombre dérivé d'une fonction en un réel.

Pour cela, nous allons travailler sur la forme simplifiée du rapport de Newton (cf. chapitre précédent).

### 2°) Exemple

$$f: x \mapsto \frac{1}{x}$$

#### • Études de la dérivabilité de $f$ en 1.

La valeur 1 a été choisie à titre d'exemple. On pourrait faire le même travail en tout autre réel (différent de 0). On pourrait prendre un autre nombre (2, 3, -1...); la méthode serait la même.

On introduit un réel  $h$  pour former le taux de variation de  $f$  entre 1 et  $1+h$  (avec  $h \neq 0$ ).

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \frac{1-(1+h)}{h(1+h)} = \frac{-h}{h(1+h)} = \frac{-\cancel{h}}{1+h} \times \frac{1}{\cancel{h}} = -\frac{1}{1+h} \quad (\text{pour } h \neq 0 \text{ et } h \neq -1)$$

(forme simplifiée avec « évanouissement » du  $h$  présent au dénominateur dans la forme initiale)

En général, on applique le principe de séparation des calculs : on calcule d'abord  $f(1)$ ,  $f(1+h)$ ,  $f(1+h)-f(1)$  puis enfin  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0, le nombre  $-\frac{1}{1+h}$  tend vers  $L = -1$  (pour cela, on remplace en fait  $h$  par 0 dans

l'expression simplifiée  $-\frac{1}{1+0}$  ; on le fait, mais on ne l'écrit pas).

Comme  $-1$  est un réel, on peut dire que  $f$  est dérivable en 1 et le nombre dérivé de  $f$  en 1 est égal à  $-1$ .

#### • Interprétation du calcul

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

Le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point A d'abscisse 1 est égal à  $-1$ .

C'est la seule interprétation « concrète » que nous donnerons pour l'instant du nombre dérivé.

#### • Vérification à l'aide de la calculatrice

### 3°) Commentaires

La technique de calcul sera applicable pour les fonctions que nous rencontrerons dans ce chapitre (en particulier pour les fonctions polynômes et rationnelles).

On travaille toujours sur la forme réduite du taux de variation.

Il suffit de remplacer  $h$  par 0 dans cette forme pour obtenir le nombre dérivé.

C'est pour cela que le  $h$  « solitaire » présent dans la « forme de base » du taux de variation de  $f$ ; sinon, on ne pourrait remplacer  $h$  par 0 (cf. IV).

Nous admettons que ce procédé est bien licite (c'est-à-dire « légal », bien que les mathématiques n'aient rien à voir avec le domaine juridique).

On notera que le résultat ne dépend pas de  $h$ .

Cette technique sera reprise dans le chapitre suivant avant d'être remplacée par d'autres techniques plus performantes (plus rapides et plus efficaces) que nous étudierons plus tard.

### 4°) Familles de fonctions

Nous verrons plus tard que les fonctions polynômes (de n'importe quel degré) sont dérivables en tout réel et que les fonctions rationnelles sont dérivables en tout réel de leur ensemble de définition. En particulier, les fonctions affines sont dérivables en tout réel.

Les fonctions polynômes et rationnelles ne sont pas les seules fonctions à être dérivables. Il existe d'autres fonctions dérivables, comme nous le verrons plus tard.

#### IV. Retour sur la notion de « tendre vers »

##### 1°) Intérêt de la notion de « tendre vers »

Cette notion pallie au fait que l'on ne peut pas remplacer  $h$  par 0 puisque l'on a dit à chaque fois que  $h \neq 0$ .

Il est important de bien noter que l'on fera toujours tendre  $h$  vers 0 (et non vers un nombre autre que 0) dans ce chapitre et dans le suivant.

##### 2°) Intérêt de la forme simplifiée du taux de variation

On ne peut pas travailler sur la forme initiale car si l'on remplaçait  $h$  par 0 dans le rapport  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ , on obtiendrait «  $\frac{0}{0}$  » qui n'existe pas.

On retiendra qu'il est impossible de travailler sur la forme initiale du taux de variation entre  $a$  et  $a+h$ .

#### V. Cas de non dérivabilité

##### 1°) Généralités

Il y a des cas où l'on ne peut pas remplacer  $h$  par 0 dans l'expression simplifiée du rapport de Newton (par exemple, lorsque le dénominateur vaut 0). La fonction n'est alors pas dérivable en  $a$  et l'on ne peut pas définir de nombre dérivé.

Ce genre de situation sera rarement étudié cette année mais nous allons néanmoins détailler deux exemples très importants : le cas des fonctions « racine carrée » et « valeur absolue » en 0.

##### 2°) Cas de la fonction « racine carrée » en 0

$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$

On veut étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 (on notera que la fonction  $f$  est bien définie en 0).

On introduit un réel  $h$  pour former le taux de variation de  $f$  entre 0 et  $0+h$  (avec  $h > 0$ ).

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\text{taux de variation « simplifié » ; le } h \text{ du dénominateur de la forme initiale ne s'est pas « évanoui »).$$

On dit ici que  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  est la forme simplifiée du taux de variation au sens où l'on a le moins de  $h$  possible.

On ne peut pas remplacer  $h$  par 0 dans le quotient simplifié car un dénominateur n'est jamais nul.

Lorsque  $h$  tend vers 0 en restant strictement positif, le nombre  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  tend vers  $+\infty$ , en prenant des valeurs de strictement positives. Par suite,  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  prend des valeurs de plus en plus grandes strictement positives (faire l'expérience en divisant 1 par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...).

On dit que  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers 0 en restant strictement positif.

Comme on n'obtient pas un nombre fini, la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 et l'on ne peut donc pas définir de nombre dérivé de  $f$  en 0.

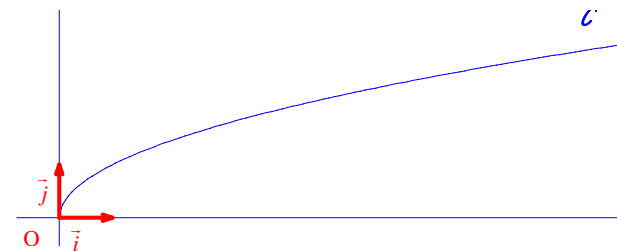
On retiendra de cette étude que la fonction « racine carrée » est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

On notera cependant que l'on peut aisément interpréter le résultat graphiquement dans un repère d'origine  $O$ . En effet, si l'on note  $M$  le point de la courbe représentative d'abscisse  $h$ , on peut dire que le coefficient directeur de la droite  $(OM)$  tend vers  $+\infty$ .

Autrement dit, la droite  $(OM)$  se rapproche de l'axe des ordonnées. C'est la position limite de la sécante  $(OM)$ .

On dit que la courbe admet l'axe des ordonnées pour tangente au point d'abscisse 0 (en fait, on parle plutôt de demi-tangente en disant que la demi-tangente en  $O$  est la demi-droite  $[Oy)$  car la fonction « racine carrée » n'est pas définie à gauche de 0). On peut s'en convaincre aisément en faisant la manipulation sur *Geogebra*.

Il s'agit d'une *demi-tangente verticale*. Ce type de tangente, en dehors de ce cas, ne sera pas étudié cette année.



Nous verrons plus tard que la fonction « racine carrée » est dérivable en tout réel strictement positif.

##### 3°) Cas de la fonction « valeur absolue » en 0

$$f: x \mapsto |x|$$

On veut étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

On introduit un réel  $h$  pour former le taux de variation de  $f$  entre 0 et  $0+h$  (avec  $h \neq 0$ ).

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Il est impossible de simplifier le quotient sans distinguer deux cas.

1<sup>er</sup> cas :  $h > 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

2<sup>e</sup> cas :  $h < 0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\frac{h}{h} = -1$$

Dans chaque cas, le rapport de Newton est constant.

On est obligé de distinguer deux cas pour faire tendre  $h$  vers 0.

Lorsque  $h$  tend vers 0 en restant strictement positif,  $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$  tend évidemment vers 1.

Lorsque  $h$  tend vers 0 en restant strictement négatif,  $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$  tend évidemment vers  $-1$ .

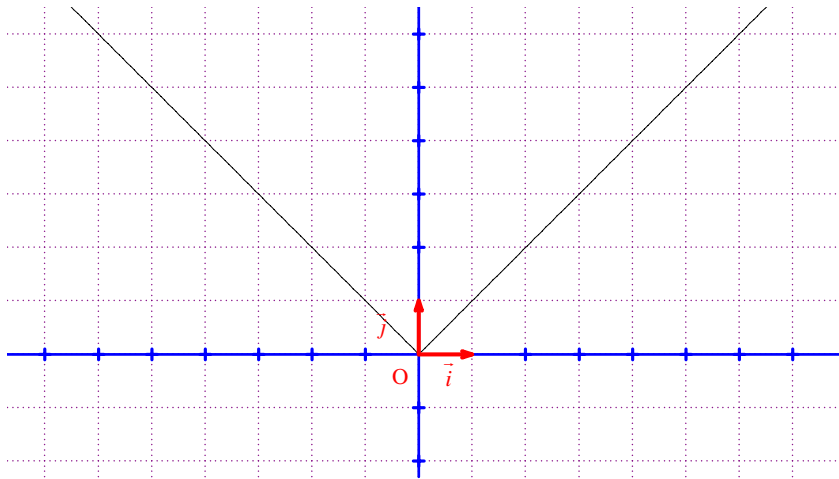
Les deux nombres sont différents donc  $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$  ne tend pas vers un même nombre selon que l'on fait tendre  $h$  en restant positif ou en restant négatif.

Par conséquent, la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 et l'on ne peut pas parler du nombre dérivé de  $f$  en 0.

Nous dirons que :

- $f$  est dérivable en 0 à droite et que le nombre dérivé de  $f$  en 0 à droite est 1 ;
- $f$  est dérivable en 0 à gauche et que le nombre dérivé de  $f$  en 0 à gauche est  $-1$ .

La représentation graphique de la fonction « valeur absolue » admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs 1 et  $-1$ . Ces deux demi-tangentes sont donc confondues avec les deux demi-droites qui forment la représentation graphique de la fonction « valeur absolue ».



On dit que l'origine du repère est un *point anguleux*.

Nous avons démontré que la fonction « valeur absolue » n'est pas dérivable en 0. En revanche, nous verrons plus tard que la fonction « valeur absolue » est dérivable en tout réel non nul.

## VI. Écriture symbolique

Plutôt que d'écrire en français « lorsque  $h$  tend vers 0,  $2+h$  tend vers 2 », on pourra écrire  $2+h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2$ .

On utilise la flèche  $\rightarrow$  qui signifie « tend vers ». Elle ne comporte pas de talon.

Quoique pratique, nous utiliserons assez peu ce type d'écriture cette année ; nous verrons une notation plus conforme au programme dans le chapitre suivant.

# Résumé

## Définition

On dit que  $f$  est « **dérivable** » en  $a$  lorsque le rapport  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  tend vers un nombre  $L$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Dans ce cas, le nombre  $L$  est appelé « **nombre dérivé** » de  $f$  en  $a$ .

## Deux remarques

Lorsqu'une fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , on peut définir le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

Le taux de variation sert à trouver le nombre dérivé « à la main » par calcul.

## Interprétation « concrète » du calcul d'un nombre dérivé

Pour l'instant, la seule interprétation concrète que nous donnerons d'un nombre dérivé est qu'il donne le coefficient directeur de la tangente.

## Fonctions non dérivables

La fonction « racine carrée » n'est pas dérivable en 0 (à droite). En revanche, elle est dérivable en tout réel strictement positif.

La fonction « valeur absolue » n'est pas dérivable en 0. En revanche, elle est dérivable en tout réel non nul.

En résumé, les fonctions « racine carrée » et « valeur absolue » ne sont pas dérivables en 0 ; en revanche, chacune est dérivable en tout autre réel de son ensemble de définition.