Règle $af(\alpha)$

• Introduction :

Il s'agit d'étudier la place d'un nombre α par rapport aux racines x' et x'' d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) *sans calculer les racines*.

On suppose donc que le discriminant de l'équation est strictement positif.

• Énoncé :

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.
On suppose que le discriminant du polynôme est strictement positif.
On note x' et x'' les racines du polynôme telles que $x'<x''$.
On considère un réel α tel que $f(\alpha)\neq 0$.

• Si $a\times f(\alpha)<0$, alors $x'<\alpha<x''$.

• Si $a\times f(\alpha)>0$, alors on compare α à la demi-somme $\dfrac{x'+x''}{2}$ puisque $x'<\dfrac{x'+x''}{2}<x''$ et $\dfrac{x'+x''}{2}=-\dfrac{b}{2a}$.

Si $\alpha<-\dfrac{b}{2a}$, alors $\alpha<x'<x''$.
Si $\alpha>-\dfrac{b}{2a}$, alors $x'<x''<\alpha$.

Remarque évidente :

Dans le produit « $a\times f(\alpha)$ », le a est le même que dans ax^2+bx+c où a, b, c sont trois réels.

• Démonstration :

On utilise la règle du signe d'un trinôme.

→ On se place dans le cas où $a\times f(\alpha)<0$.
Cette inégalité signifie que $f(\alpha)$ est du signe contraire de a.
Donc α est à l'intérieur de l'intervalle des racines.

$\rightarrow$ On se place dans le cas où $a \times f(\alpha) > 0$.
Cette inégalité signifie que $f(\alpha)$ est du même signe que *a*.
Donc α est à l'extérieur de l'intervalle des racines.

Dans ces deux cas, on a $f(\alpha) \neq 0$.

Lorsque $f(\alpha) = 0$, α est racine de $f(x)$.

• Remarque :

On peut formuler des équivalences :

$$x' < \alpha < x" \text{ si et seulement si } a \times f(\alpha) < 0.$$

$$\alpha < x' < x" \text{ si et seulement si } a \times f(\alpha) > 0 \text{ et } \alpha < -\frac{b}{2a}.$$

$$x' < x" < \alpha \text{ si et seulement si } a \times f(\alpha) > 0 \text{ et } \alpha > -\frac{b}{2a}.$$

• À noter :

Il n'est pas nécessaire de calculer x' et $x"$ pour appliquer la règle. C'est tout l'intérêt de cette règle.

• Exercice :

On considère l'équation $mx^2 + (m+1)x - m = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ où *m* est un réel non nul.

1°) Démontrer que l'équation admet deux racines distinctes.
On note x' et $x"$ ses racines telles que $x' < x"$.
On de cherchera pas l'expression de ces racines en fonction de *m*.

2°) Déterminer pour quelles valeurs de *m* on a : $x' < 1 < x"$.

Solution :

On pose $f(x) = mx^2 + (m+1)x - m$

C'est un polynôme du second degré car $m \neq 0$.

$a = m \qquad b = m+1 \qquad c = -m$

1°) **Démontrons que l'équation admet deux racines distinctes.**

$$\Delta = (m+1)^2 - 4\times(-m)\times m$$

$$\Delta = (m+1)^2 + 4m^2$$

Δ est la somme de deux carrés qui ne peuvent s'annuler simultanément.

Donc $\Delta > 0$.

Autre méthode :

On développe Δ.

$\Delta = 5m^2 + 2m + 1$.

$5m^2 > 0$ et $1 > 0$

Mais $2m$ n'est pas forcément supérieur ou égal à 0.

Donc le raisonnement ne tient pas la route.

On peut visualiser la propriété en traçant la parabole d'équation $y = 5x^2 + 2x + 1$ (par exemple avec *Geogebra*). Pour le justifier algébriquement, on calcule un nouveau discriminant.

2°) **Déterminons pour quelles valeurs de m on a : $x' < 1 < x''$.**

On applique la règle.

On calcule d'abord $f(1)$.

$$f(1) = m + 1$$

On cherche tel que $m \times f(1) < 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$m\times(m+1) < 0$$

$-1 < m < 0$ (tableau de signes ou règle du signe d'un polynôme du second degré)