TS1

Contrôle du jeudi 14 novembre 2013 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………….

Note : ……/20

I. (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$1-\mathrm{e}^{4-x^2}=0 \quad (1)$; $\sqrt{\mathrm{e}^x+1}=2 \quad (2)$; $1<\mathrm{e}^{1-3x}<\mathrm{e} \quad (3)$; $\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x=-2 \quad (4)$; $\dfrac{3\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x\right)^3}\geqslant 8-\mathrm{e}^{-x} \quad (5)$.

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 de ces équations et inéquations.

$S_1=$ …………………	$S_2=$ …………………	$S_3=$ …………………	$S_4=$ …………………	$S_5=$ …………………

II. (2 points)

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}$ est-elle géométrique ? Si oui, donner sa raison.

……

……

……

……

……

……

III. (5 points)

1°) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel x on ait $x^3-7x^2+6=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

$a=$ ………… $b=$ ………… $c=$ …………

En déduire une factorisation de x^3-7x^2+6 en produit de trois facteurs du premier degré.

$x^3-7x^2+6=$ …………………

2°) Donner l'ensemble des solutions S de l'équation $\mathrm{e}^{3x}-7\mathrm{e}^{2x}+6=0$.

$S=$ ………………………………

IV. (2 points)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer et tracer sur le graphique ci-dessous l'ensemble E des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $y^2=\mathrm{e}^{2x}$.

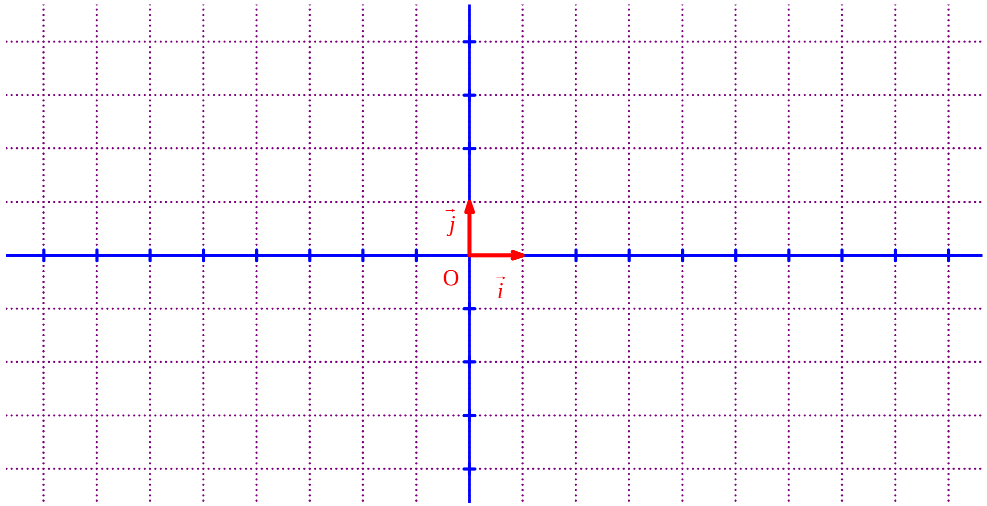
……

……

……

……

……



V. (3 points)

Étudier dans un tableau les variations de la fonction $f : x \mapsto (x-2)e^x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer les extremums éventuels (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

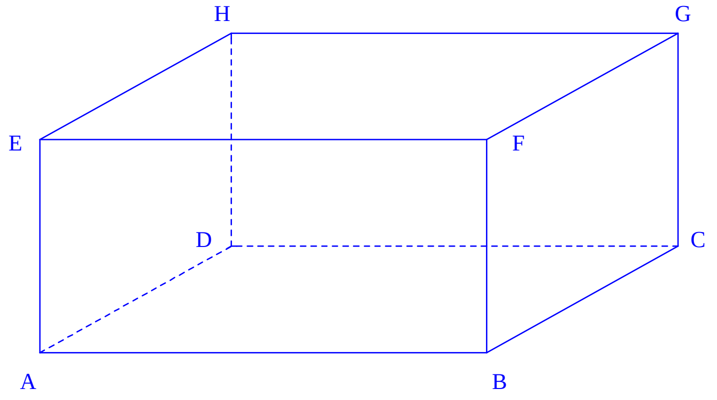
....

....

VI. (2 points)

On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I le milieu de [AD] et J le point de [EF] tel que $EJ = \frac{1}{4}EF$.

Construire la section du pavé ABCDEFGH par le plan (CIJ).
Nommer les points de construction.
Laisser les traits de construction apparents. Griser éventuellement la section.

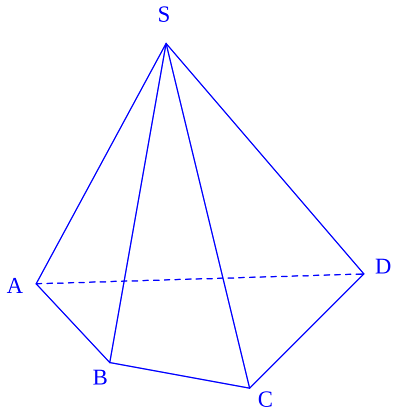


Indiquer la méthode utilisée ; cocher la case correspondante.

☐ méthode par parallélisme ☐ méthode par prolongement

VII. (1 point)

Soit SABCD une pyramide de sommet S dont les diagonales de la base se coupent en I.
Déterminer et tracer l'intersection des plans (SAC) et (SBD) (sans justifier).



$(SAC) \cap (SBD) =$ ....

Corrigé du contrôle du 14-11-2013

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$1-e^{4-x^2}=0 \quad (1)$; $\sqrt{e^x+1}=2 \quad (2)$; $1<e^{1-3x}<e \quad (3)$; $e^{3x}+e^x=-2 \quad (4)$; $\dfrac{3e^{2x}}{\left(e^x\right)^3}\geqslant 8-e^{-x} \quad (5)$.

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 de ces équations et inéquations.

$S_1=\{-2\,;2\}$	$S_2=\{\ln 3\}$	$S_3=\left]0\,;\dfrac{1}{3}\right[$	$S_4=\varnothing$	$S_5=\left]-\infty\,;-\ln 2\right]$ ou $S_5=\left]-\infty\,;\ln\dfrac{1}{2}\right]$

Résolution détaillée :

• $1-e^{4-x^2}=0 \quad (1)$

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow e^{4-x^2}=1\\
&\Leftrightarrow 4-x^2=0\\
&\Leftrightarrow x^2=4\\
&\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-2
\end{aligned}
$$

• $\sqrt{e^x+1}=2 \quad (2)$

$$
\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow e^x+1=4\\
&\Leftrightarrow e^x=3\\
&\Leftrightarrow x=\ln 3
\end{aligned}
$$

• $1<e^{1-3x}<e \quad (3)$

$$
\begin{aligned}
(3) &\Leftrightarrow e^0<e^{1-3x}<e^1\\
&\Leftrightarrow 0<1-3x<1\\
&\Leftrightarrow -1<-3x<0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}>x>0
\end{aligned}
$$

• $e^{3x}+e^x=-2 \quad (4)$

Le premier membre est la somme de deux termes strictement positifs.
Donc le premier membre est strictement positif.
L'équation (4) n'admet donc aucune solution dans $\mathbb{R}$.

• $\dfrac{3e^{2x}}{\left(e^x\right)^3}\geqslant 8-e^{-x} \quad (5)$

$$
\begin{aligned}
(5) &\Leftrightarrow \frac{3e^{2x}}{e^{3x}}\geqslant 8-e^{-x}\\
&\Leftrightarrow 3e^{-x}\geqslant 8-e^{-x}\\
&\Leftrightarrow 4e^{-x}\geqslant 8\\
&\Leftrightarrow e^{-x}\geqslant 2\\
&\Leftrightarrow -x\geqslant \ln 2\\
&\Leftrightarrow x\leqslant -\ln 2
\end{aligned}
$$

II.

La suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{e^{n+1}}{e^{2n}}$ est-elle géométrique ? Si oui, donner sa raison.

• **1^ère^ méthode :** la mieux

$$
\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n&=\frac{e^{n+1}}{e^{2n}}\\
&=\frac{e^n\times e}{e^{2n}}\\
&=\frac{e}{e^n}\\
&=e\times\frac{1}{e^n}\\
&=e\times\left(\frac{1}{e}\right)^n
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n&=\frac{e^{n+1}}{e^{2n}}\\
&=\frac{e^n\times e}{e^{2n}}\\
&=e^{n-2n}\times e\\
&=e^{-n}\times e\\
&=\left(e^{-1}\right)^n\times e\\
&=\left(\frac{1}{e}\right)^n\times e
\end{aligned}
$$

Cette égalité montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{e}$.

• **2^e^ méthode :** plus lourde, moins bien

$$
\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{n+2}}{e^{2n+2}}}{\dfrac{e^{n+1}}{e^{2n}}}
$$

III.

1°) Déterminer trois réels *a*, *b*, *c* tels que pour tout réel *x* on ait $x^3-7x^2+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

$a=1$ $\qquad$ $b=-6$ $\qquad$ $c=-6$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad (x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$

$$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

On reprend l'expression x^3-7x^2+6 donnée initialement.

Pour que $x^3-7x^2+6=(x-1)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel *x*, il suffit de choisir *a*, *b*, *c* vérifiant les égalités ci-dessous [identification des coefficients des monômes de même degré].

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=-7 \\ c-b=6 \\ -c=6 \end{cases}$$

On écrit les égalités vérifiées par *a*, *b*, *c* sans *x*.

Compte tenu de la première égalité ($a=1$), la deuxième égalité donne alors $b=-6$.
La troisième équation donne immédiatement $c=-6$.

L'égalité $c-b=6$ est bien vérifiée.

Ainsi, on a $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=-6 \end{cases}$ et on obtient ainsi $x^3-7x^2+6=(x-1)(x^2-6x-6)$ pour tout réel *x*.

En déduire une factorisation de x^3-7x^2+6 en produit de trois facteurs du premier degré.

$$x^3-7x^2+6=(x-1)\left(x-3-\sqrt{15}\right)\left(x-3+\sqrt{15}\right)$$

explication

Les racines du polynôme du second degré x^2-6x-6 sont $x_1=3-\sqrt{15}$ et $x_2=3+\sqrt{15}$ (obtenues grâce au discriminant réduit 15).
On applique la règle de factorisation d'un trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ où *a*, *b*, *c* sont trois réels tels que $a\neq 0$.
On suppose que le polynôme $P(x)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif.
On note x_1 et x_2 ces deux racines.
Dans ce cas, le polynôme est factorisable en facteurs du premier degré et l'on a :
$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

2°) Donner l'ensemble des solutions *S* de l'équation $e^{3x}-7e^{2x}+6=0$.

$$S=\left\{0\,;\,\ln\left(\sqrt{15}-3\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
e^{3x}-7e^{2x}+6=0 &\Leftrightarrow \left(e^x\right)^3-7\left(e^x\right)^2+6=0 \\
&\Leftrightarrow \left(e^x-1\right)\left(e^x-3-\sqrt{15}\right)\left(e^x-3+\sqrt{15}\right)=0 \ * \\
&\Leftrightarrow e^x-1=0 \text{ ou } e^x-3-\sqrt{15}=0 \text{ ou } e^x-3+\sqrt{15}=0 \\
&\Leftrightarrow e^x=1 \text{ ou } e^x=3+\sqrt{15} \text{ ou } e^x=3-\sqrt{15} \text{ impossible car } 3-\sqrt{15}<0 \\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\ln\left(3+\sqrt{15}\right)
\end{aligned}$$

* On reprend la factorisation du polynôme x^3-7x^2+6 par e^x.

Autre méthode :

On effectue le changement d'inconnue $X=e^x$.

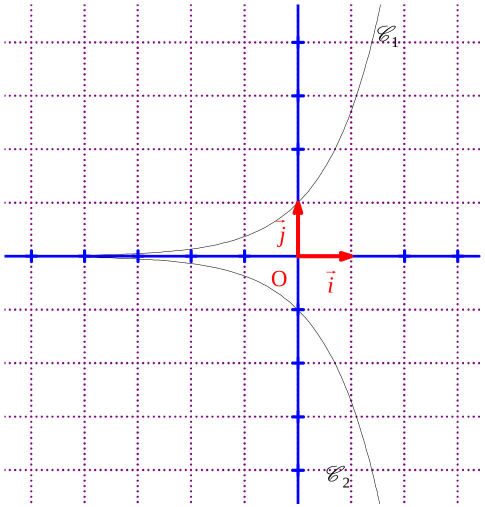
IV.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Déterminer et tracer sur le graphique ci-dessous l'ensemble *E* des points M(*x* ; *y*) tels que $y^2=e^{2x}$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow y^2=e^{2x} \\
&\Leftrightarrow y^2=\left(e^x\right)^2 \\
&\Leftrightarrow y=e^x \text{ ou } y=-e^x
\end{aligned}$$

On en déduit que $E=\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions $f:x\mapsto e^x$ et $g:x\mapsto -e^x$.
$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses car le repère est orthonormé (donc orthogonal).



V.

Étudier dans un tableau les variations de la fonction $f : x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer les extremums éventuels (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle de produit et de somme de fonctions dérivables).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x (x-2)$$

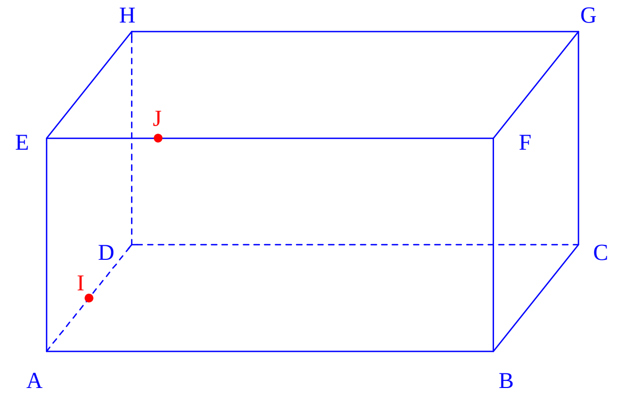
$$= (x-1)\mathrm{e}^x$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de e^x		+		+	
Signe de $x-1$		–	0	+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f		↘	$1-\mathrm{e}$	↗	

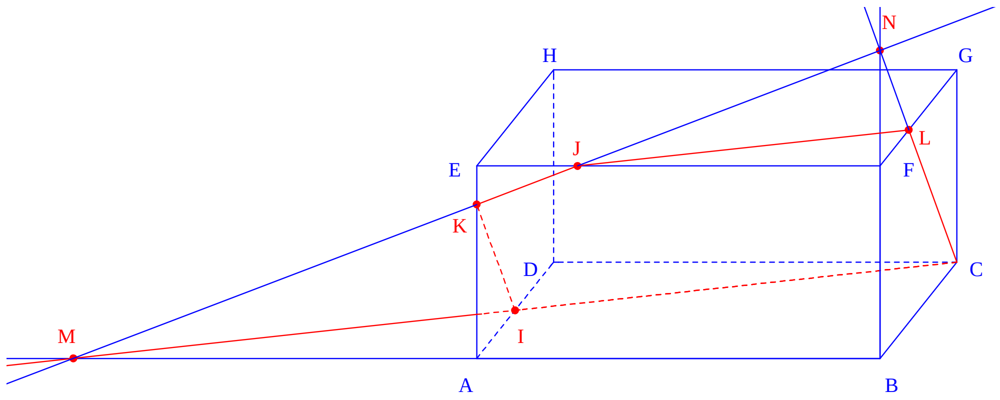
VI.

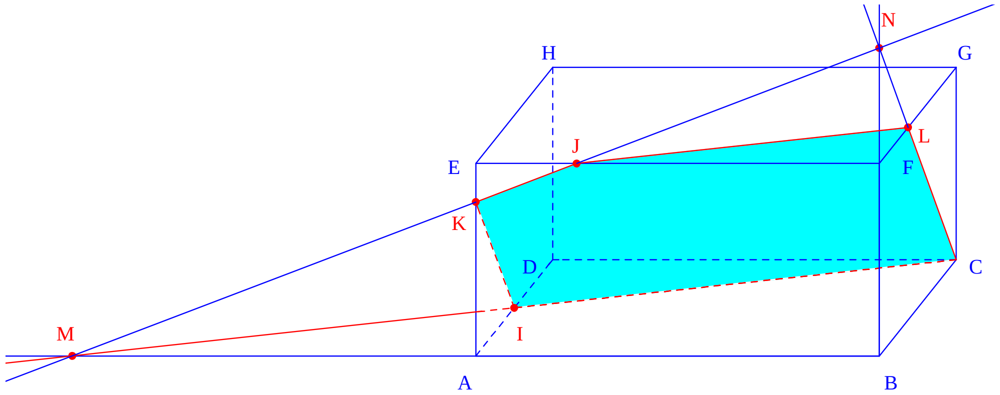
On considère un pavé droit ABCDEFGH. On note I le milieu de [AD] et J le point de [EF] tel que $\mathrm{EJ} = \frac{1}{4}\mathrm{EF}$.

Construire la section du pavé ABCDEFGH par le plan (CIJ).
Nommer les points de construction.
Laisser les traits de construction apparents.



On utilise la méthode de parallélisme ou la méthode de prolongement (meilleure).



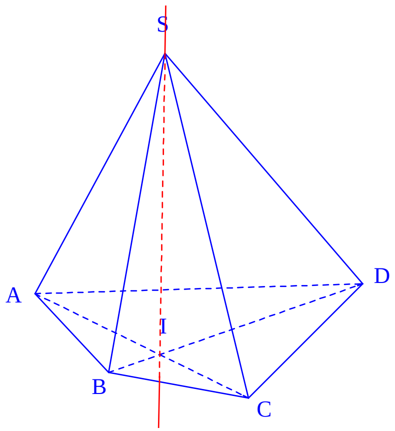


La section du pavé ABCDEFGH par le plan (CIJ) est le pentagone CIKJL.

VII.

Soit SABCD une pyramide de sommet S dont les diagonales de la base se coupent en I.

Déterminer et tracer l'intersection des plans (SAC) et (SBD) (sans justifier).



$$(SAC) \cap (SBD) = (SI)$$