1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 14 novembre 2013 (3 heures)

I. (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

$x^2(3x-1)=x$ (1) ; $(2-|x|)^2=x^2+1$ (2) ; $\dfrac{3x^2}{x+2}\leqslant 1$ (3).

II. (8 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ (1).

2°) On se propose de déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en utilisant l'égalité (1) et les propriétés du cours. Compléter le tableau suivant puis vérifier sur calculatrice graphique.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$		0	
$\dfrac{1}{x+1}$		$\Vert$	
$-\dfrac{1}{x+1}$		$\Vert$	
$f(x)$		$\Vert$	

3°) Soit a un réel fixé dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

Comparer sans calculs, en utilisant la question précédente, les nombres $\dfrac{a}{1+a}$, $\dfrac{a^2}{1+a^2}$, $\dfrac{a^3}{1+a^3}$.

4°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2|x|}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Calculer $g\left(1-\sqrt{2}\right)$ (valeur exacte sans racine carrée au dénominateur sous forme simplifiée).

b) Déterminer sans calcul le sens de variation de g sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$ en utilisant le sens de variation de f (expliquer).

III. (8 points)

Soit ABC un triangle quelconque.
On note I, J, K les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$.

Construire les points I, J, K sur la figure fournie sur la copie préparée.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2°) En déduire que les droites (IJ) et (CK) sont parallèles.

Partie 2

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1°) Donner sans justifier les coordonnées de A, B, C, I, J.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ) en utilisant une méthode vectorielle (seule cette méthode sera prise en compte). On donnera une équation sous la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des entiers relatifs.

3°) Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu de [BC].

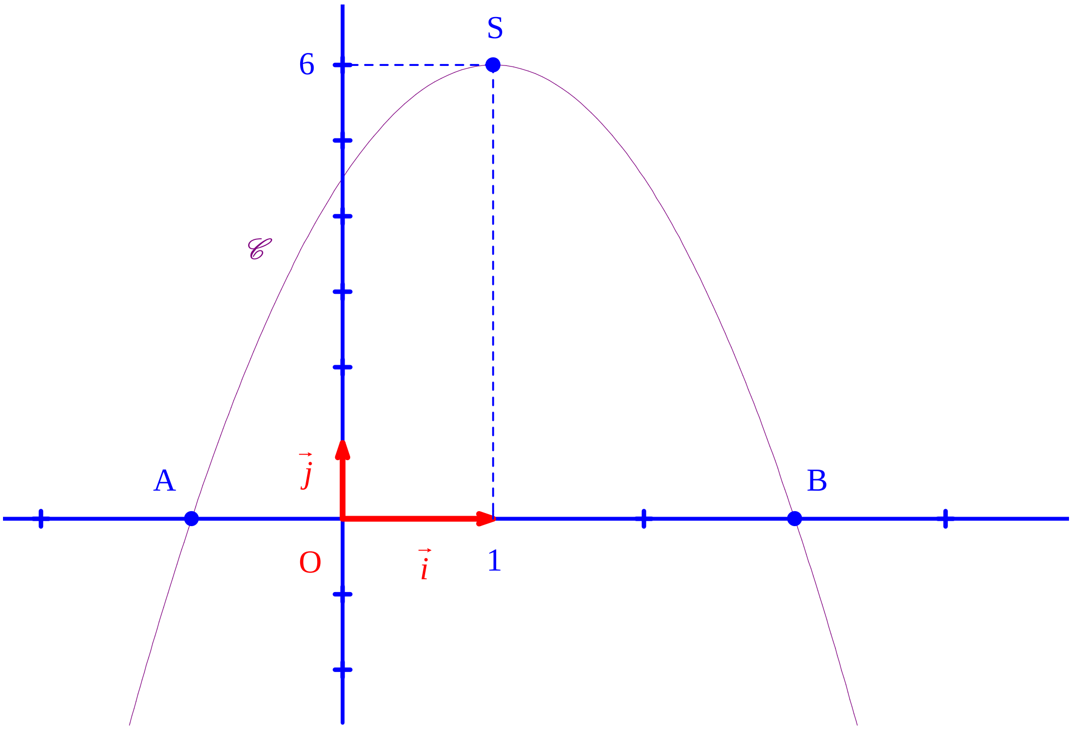
IV. (6 points)

La parabole $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Les points A(– 1 ; 0), B(3 ; 0) et S(l ; 6) appartiennent à $\mathscr{C}$.
Pour tout réel x, on peut écrire l'expression de f sous la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 des réels ($x_1 < x_2$).

1°) Donner graphiquement, sans justifier, les valeurs de x_1 et x_2.

2°) En utilisant le sommet S de la parabole, calculer la valeur de a puis vérifier que l'on a :
$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$.

3°) On considère la fonction h définie par $h(x) = \left| -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \right|$.
Exprimer $h(x)$ en fonction de x sans barres de valeur absolue.
On répondra dans un tableau en ajoutant une ligne servant de justification.



V. (8 points)

Sur le graphique suivant, on a représenté la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x^2+x-4$ dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y=2x+m$.

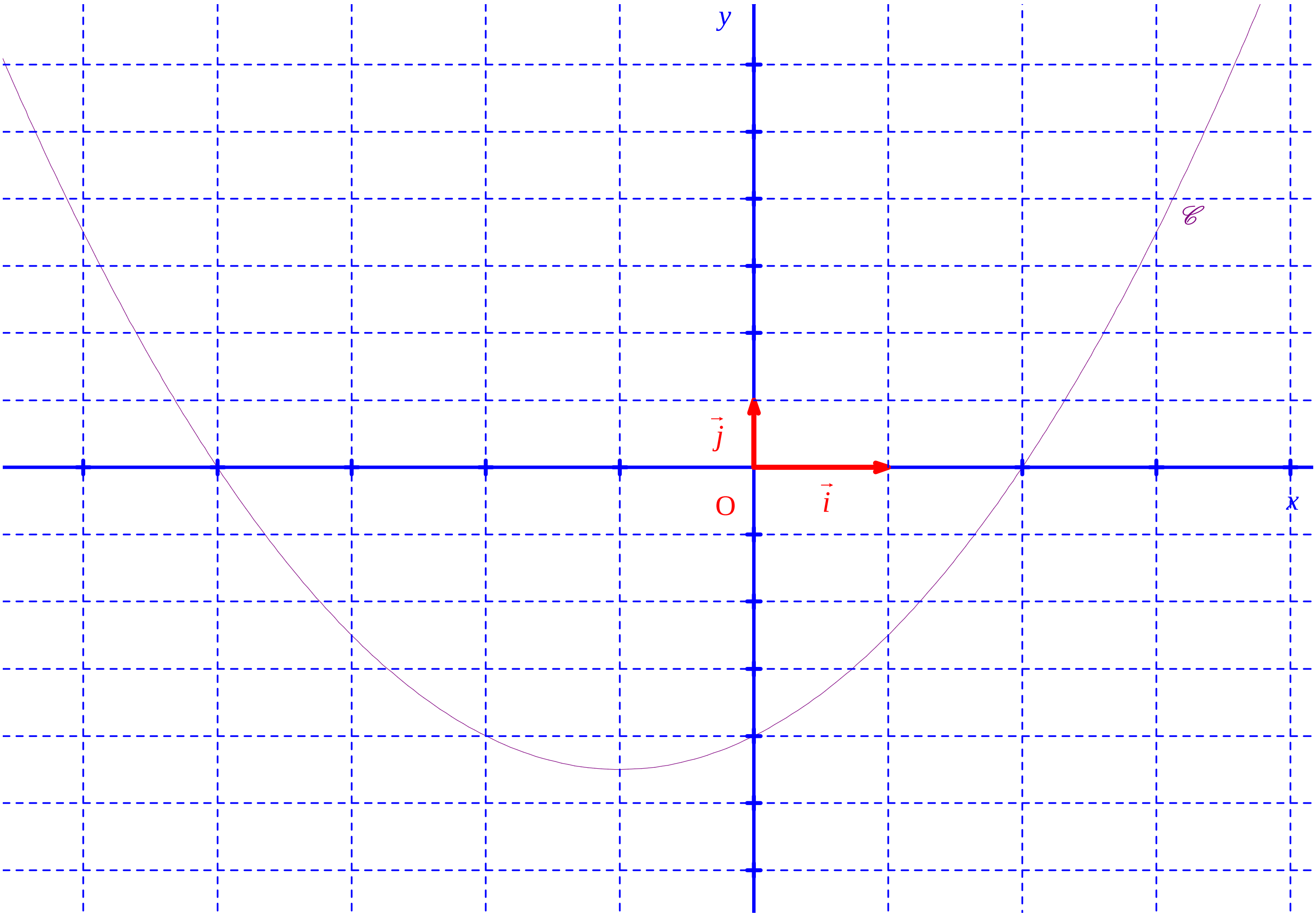
1°) Sur le graphique, tracer les droites D_{-3} (en rouge), $D_{-\frac{9}{2}}$ (en vert), D_{-5} (en bleu).

2°) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et de D_m sont les solutions de l'équation $\dfrac{1}{2}x^2-x-4-m=0$ (E).

3°) a) Démontrer que le discriminant de (E) est égal à $\Delta=2m+9$.

b) Compléter le tableau ci-dessous :

m	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de Δ	
Nombre de racines de (E)	
Nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m	



VI. (4 points)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note D_1, D_2, D_3 d'équations cartésiennes respectives $3x+2y-7=0$, $2x-3y-9=0$, $ax-5y+1=0$ où a désigne un nombre réel.

Déterminer la valeur de a afin que les droites D_1, D_2, D_3 soient concourantes.
Rédiger votre réponse succinctement en donnant les étapes essentielle de la démarche suivie, sans forcément détailler tous les calculs.
Toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Consignes de présentation :

• Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

• Faire les traits de fractions, les flèches de variation, les lignes des tableaux, à la règle.

Conseils de rédaction :

• On rappelle la rédaction suivante pour les équations et inéquations (et à n'utiliser que pour celles-ci) :
(1) est successivement équivalente à …

• On rappelle que l'expression « si et seulement si » s'emploie pour la recherche d'équations cartésiennes de droites.

• On rappelle que toute lettre non introduite dans l'énoncé doit être définie avant d'être utilisée.

1ère S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du 14 novembre 2013
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	Total/40	Total/20

I. (6 points)

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (8 points)

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ (1).

2°) On se propose de déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en utilisant l'égalité (1) et les propriétés du cours. Compléter le tableau suivant puis vérifier sur calculatrice graphique.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$		0	
$\dfrac{1}{x+1}$		||	
$-\dfrac{1}{x+1}$		||	
$f(x)$		||	

3°) Soit a un réel fixé dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.

Comparer sans calculs, en utilisant la question précédente, les nombres $\dfrac{a}{1+a}$, $\dfrac{a^2}{1+a^2}$, $\dfrac{a^3}{1+a^3}$.

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

4°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2|x|}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Calculer $g\left(1-\sqrt{2}\right)$ (valeur exacte sans racine carrée au dénominateur sous forme simplifiée).

……...

……...

……...

……...

b) Déterminer sans calcul le sens de variation de g sur l'intervalle $]-1\,;\,0]$ en utilisant le sens de variation de f (expliquer).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

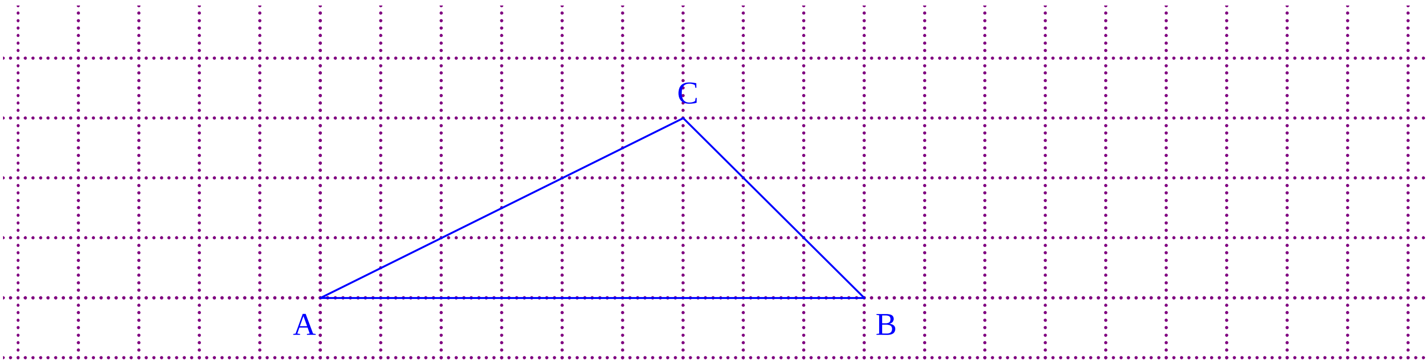
……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (8 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I, J, K les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$. Construire sur la figure ci-dessous les points I, J, K sans justifier.



Partie 1

1°) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) En déduire que les droites (IJ) et (CK) sont parallèles.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Partie 2

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1°) Donner sans justifier les coordonnées de A, B, C, I, J.

A $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$ B $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$ C $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$ I $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$ J $\left| \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{array} \right.$

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IJ) en utilisant une méthode vectorielle (seule cette méthode sera prise en compte). On donnera une équation sous la forme $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des entiers relatifs.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

3°) Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu de [BC].

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

IV. (6 points)

Les points A(– 1 ; 0), B(3 ; 0) et S(l ; 6) appartiennent à $\mathscr{C}$. Pour tout réel *x*, on peut écrire l'expression de *f* sous la forme factorisée $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec *a*, x_1 et x_2 des réels ($x_1 < x_2$).

1°) Donner graphiquement, sans justifier, les valeurs de x_1 et x_2.

$x_1 =$ .... $x_2 =$ ....

2°) En utilisant le sommet S de la parabole, calculer la valeur de *a* puis vérifier que : $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}$.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

3°) On considère la fonction *h* définie par $h(x)=\left|-\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{2}\right|$.

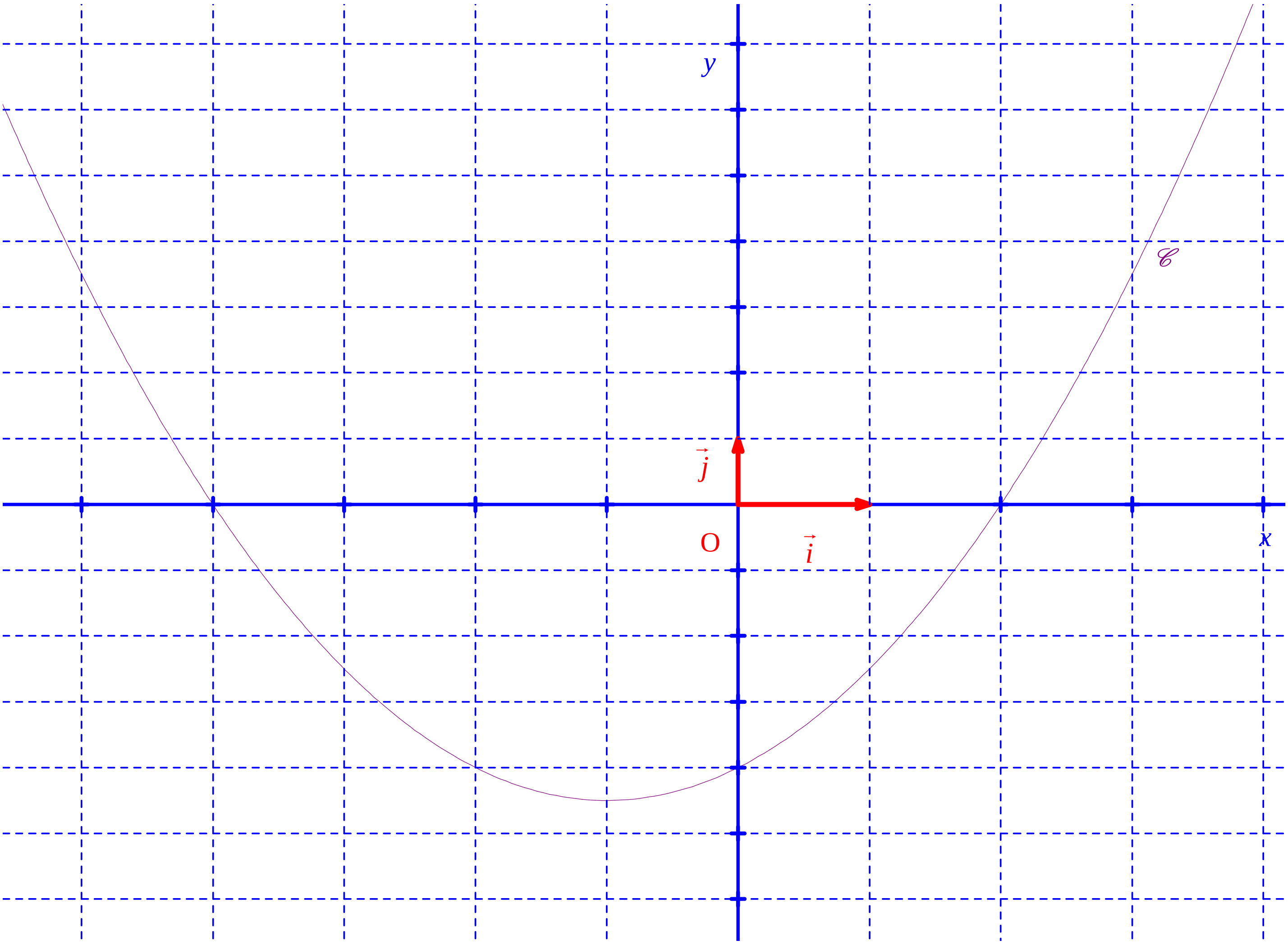
Exprimer $h(x)$ en fonction de *x* sans barres de valeur absolue.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$

V. (8 points)

Sur le graphique situé ci-dessous, on a représenté la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y=\frac{1}{2}x^2+x-4$ dans le plan muni d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y=2x+m$.

1°) Sur le graphique, tracer les droites D_{-3} (en rouge), $D_{-\frac{9}{2}}$ (en vert), D_{-5} (en bleu).



2°) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de 𝒞 et de D_m sont les solutions de l'équation $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 - m = 0$ (E).

……

……

……

……

……

……

……

3°) a) Démontrer que le discriminant de (E) est égal à $\Delta = 2m + 9$.

……

……

……

……

b) Compléter le tableau ci-dessous :

m	$-\infty$ $+\infty$
Signe de Δ	
Nombre de racines de (E)	
Nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m	

VI. (4 points)

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note D_1, D_2, D_3 d'équations cartésiennes respectives $3x+2y-7=0$, $2x-3y-9=0$, $ax-5y+1=0$ où a désigne un nombre réel.
Déterminer la valeur de a afin que les droites D_1, D_2, D_3 soient concourantes.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

Corrigé du contrôle du 14-11-2013

I.

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2(3x-1)=x$ (1).**

(1) est successivement équivalente à :

$x^2(3x-1)-x=0$

$x(x(3x-1)-1)=0$

$x(3x^2-x-1)=0$

$x=0$ ou $3x^2-x-1=0$

Considérons le polynôme $3x^2-x-1$.

$\Delta=(-1)^2-4\times 3\times(-1)=1+12=13$

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$x_1=\dfrac{-(-1)-\sqrt{13}}{2\times 3}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-(-1)+\sqrt{13}}{2\times 3}$

$x_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

(1) équivaut à $x=0$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ ou $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{S_1=\left\{0\,;\frac{1-\sqrt{13}}{6}\,;\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}}$$

• **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2-|\,x\,|)^2=x^2+1$ (2).**

(2) est successivement équivalente à :

$4-4|\,x\,|+|\,x\,|^2=x^2+1$

$4-4|\,x\,|+x^2=x^2+1$

$4-4|\,x\,|=1$

$-4|\,x\,|=-3$

$|\,x\,|=\dfrac{3}{4}$

$x=\dfrac{3}{4}$ ou $x=-\dfrac{3}{4}$

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$\boxed{S_2=\left\{\frac{3}{4}\,;-\frac{3}{4}\right\}}$$

Autre méthode de résolution : on distingue les cas $x \geqslant 0$ et $x<0$.

• Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x^2}{x+2} \leqslant 1$ (3).

(3) est successivement équivalente à :

$$\frac{3x^2}{x+2}-1 \leqslant 0$$

$$\frac{3x^2-(x+2)}{x+2} \leqslant 0$$

$$\frac{3x^2-x-2}{x+2} \leqslant 0$$

Considérons le polynôme $3x^2-x-2$.

$\Delta=(-1)^2-4\times 3\times(-2)=1+24=25$

$\Delta>0$ donc le polynôme a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$x_1=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 3}$

$x_1=\dfrac{1-5}{6}$

$x_1=-\dfrac{2}{3}$

$x_2=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 3}$

$x_2=\dfrac{1+5}{6}$

$x_2=1$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-x-2$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{3x^2-x-2}{x+2}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Soit S_3 l'ensemble des solutions de (3).

$$\boxed{S_3 = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left[-\frac{2}{3}\,;1\right]}$$

II.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

1°)

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(x) = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

2°) **Complétons le tableau suivant :**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1}{x+1}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	
$-\dfrac{1}{x+1}$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

3°) $a \in \left]0\,;1\right[$ fixé.

Comparons les nombres $\dfrac{a}{1+a}$, $\dfrac{a^2}{1+a^2}$, $\dfrac{a^3}{1+a^3}$.

Nous sommes amenés à comparer $f(a)$, $f\left(a^2\right)$ et $f\left(a^3\right)$.

Comme $a \in \left]0\,;1\right[$, on sait que : $0 < a^3 < a^2 < a < 1$.

La fonction f étant strictement croissante sur]0 ; 1[on a $0 < f\left(a^3\right) < f\left(a^2\right) < f(a) < \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\dfrac{a^3}{1+a^3} < \dfrac{a^2}{1+a^2} < \dfrac{a}{1+a}$.

4°) $g : x \mapsto \dfrac{2|x|}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

a) **Calculons $g\left(1-\sqrt{2}\right)$.**

On a $1-\sqrt{2}<0$ d'où $g\left(1-\sqrt{2}\right)=\dfrac{-2(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}+1}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) **Déterminons sans calcul le sens de variation de *g* sur l'intervalle]– 1 ; 0] en utilisant le sens de variation de *f*.**

$\forall x \in \left]-1\,;0\right] \quad g\left(x\right)=-2f\left(x\right)$

$-2<0$

On en déduit que g est strictement décroissante sur]– 1 ; 0].

III.

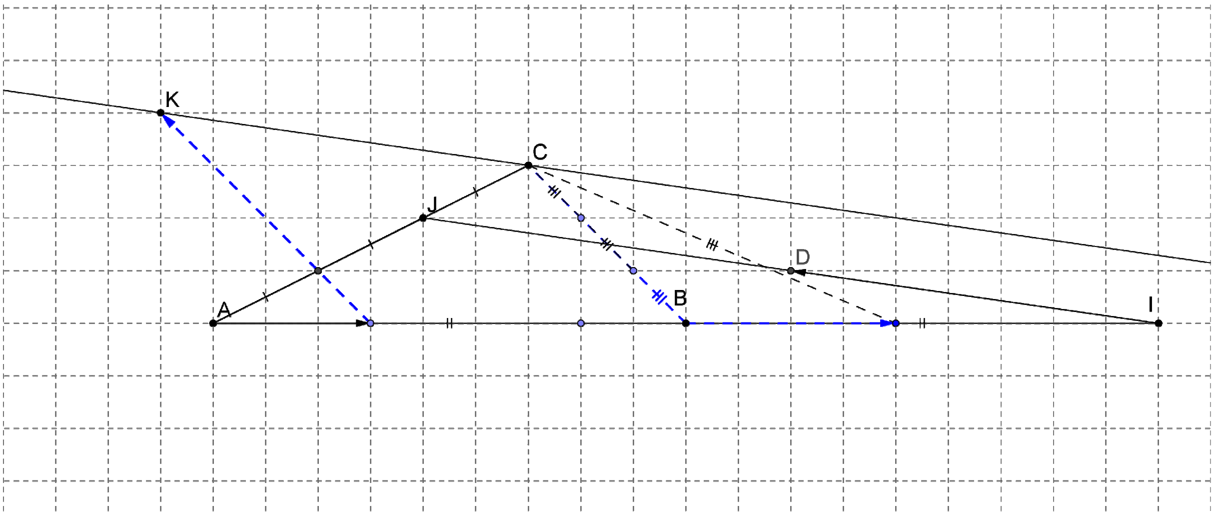
ABC triangle

$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}$

Partie 1



Pour la construction de J, on établit l'égalité $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ que l'on utilisera dans la suite.

1°) **Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2°) **Déduisons-en que les droites (IJ) et (CK) sont parallèles.**

On constate que l'on a : $2\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IJ}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires et par suite, les droites (IJ) et (CK) sont parallèles.

Partie 2

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1°) **Donnons les coordonnées des points A, B, C, I, J.**

A(0 ; 0) B(1 ; 0) C(0 ;1) I(2 ; 0) J $\left(0\,;\frac{2}{3}\right)$

2°) **Déterminons une équation cartésienne de la droite (IJ).**

Soit M (x, y) un point quelconque du plan.

M$\in$ (IJ) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\frac{2}{3}(x-2)+2y=0$

si et seulement si $x-2+3y=0$ (simplification par 2 et multiplication par 3)

si et seulement si $x+3y-2=0$

(IJ) a pour équation cartésienne $x+3y-2=0$.

3°) **Démontrons que (IJ) passe par le milieu de [BC].**

Notons L le milieu de [BC].

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_L = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On a : $x_L + 3y_L - 2 = \frac{1}{2} + 3\times\frac{1}{2} - 2 = 2-2=0$

On en déduit que L $\in$ (IJ).

IV.

1°) **Donnons graphiquement les valeurs de x_1 et x_2.**

Graphiquement on lit $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a(x+1)(x-3)$.

2°)

• **Calculons *a*.**

S(1 ; 6) $\in \mathscr{C}$ se traduit par $f(1) = 6$.

Par ailleurs, $f(1) = a(1+1)\times(1-3) = -4\times a$.

On a donc $-4a = 6$ d'où $a = -\frac{3}{2}$.

• **Vérifions que $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$.**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-3) = -\frac{3}{2}\left(x^2 - 3x + x - 3\right) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$$

3°) $h(x) = \left| -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} \right|$

Exprimons $h(x)$ en fonction de *x* sans barres de valeur absolue.

On observe que $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \left| f(x) \right|$.

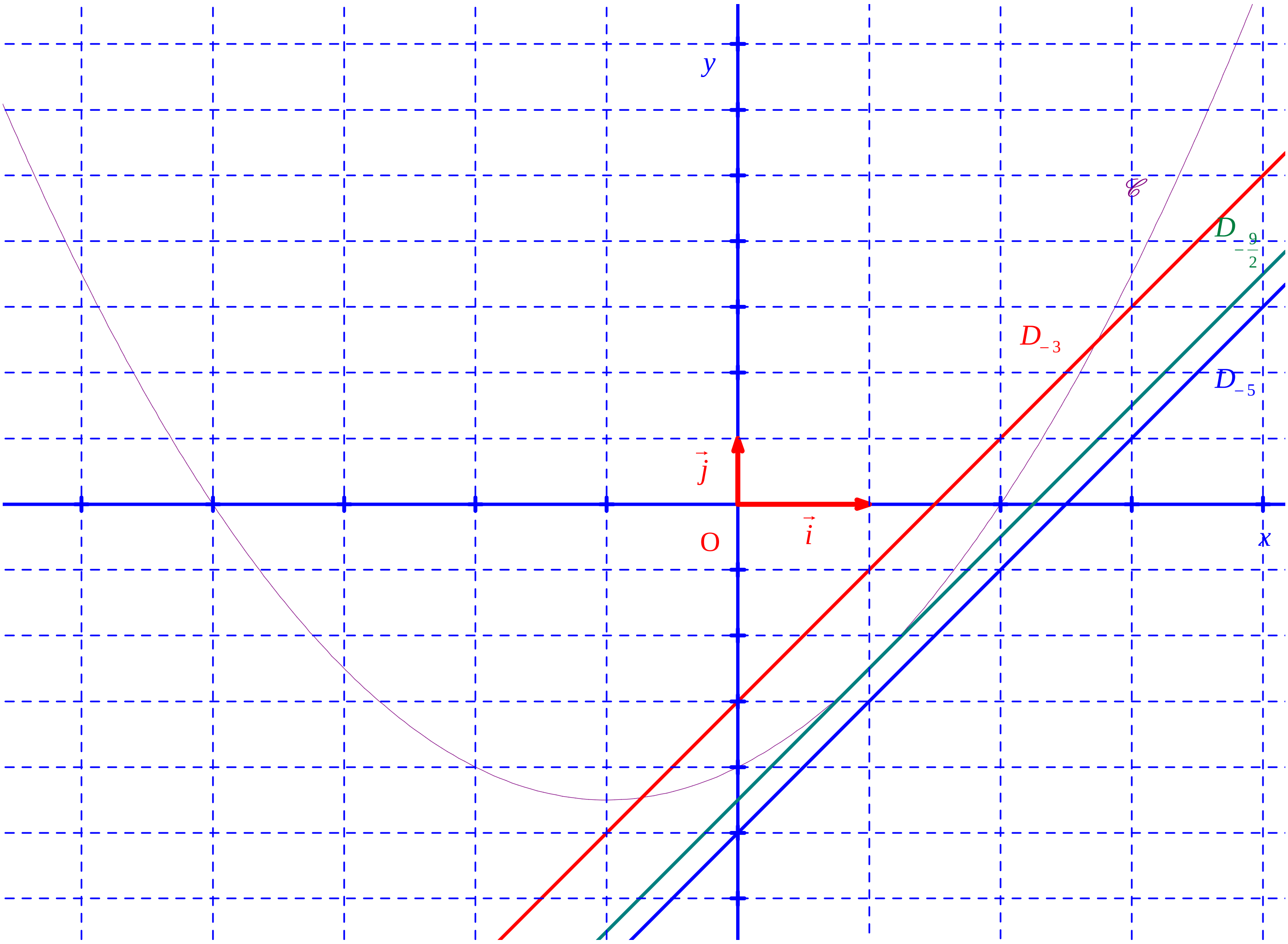
On étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de *x*.

On peut l'obtenir sans calcul en s'appuyant sur le graphique.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$	0	$-\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$	

V.

1°) **Traçons les droites D_{-3}, $D_{-\frac{9}{2}}$, D_{-5}.**



2°) **Démontrons que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et de D_m sont les solutions de l'équation $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 - m = 0$ (E).**

Les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et de D_m sont solutions de l'équation

$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 2x + m$ (1) ;

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 - 2x - m = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 - m = 0$$

3°)

a) **Démontrons que le discriminant de (E) est égal à $\Delta = 2m + 9$.**

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-4 - m) = 1 - 2(-4 - m) = 1 + 8 + 2m = 2m + 9$$

b) **Complétons le tableau précisant le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m suivant les valeurs de m.**

m	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$+\infty$
Signe de Δ		$-$	0	$+$	
Nombre de racines de (E)		0	1	2	
Nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D_m		0	1	2	

VI.

D_1 : $3x + 2y - 7 = 0$

D_2 : $2x - 3y - 9 = 0$

D_3 : $ax - 5y + 1 = 0$

a désigne un nombre réel.

Déterminons la valeur de a afin que les droites D_1, D_2, D_3 soient concourantes.

On détermine les coordonnées du point d'intersection A de D_1 et D_2.

On résout le système $\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ 2x - 3y - 9 = 0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues dont le déterminant est non nul.
Donc il admet unique couple de solutions.

Ce système est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x-3y=9 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times(-3) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 13x=39 \\ 13y=-13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

Les droites D_1 et D_2 se coupent donc au point A(3 ; – 1).

Calculons *a* pour que D_3 passe par A.

A$\in$ D_3 si et seulement si $3a-5\times(-1)+1=0$
si et seulement si $3a+6=0$
si et seulement si $a=-2$

Conclusion :

Pour que les droites D_1, D_2, D_3 soient concourantes, il faut et il suffit que $a=-2$.