TS1

Contrôle du lundi 18 novembre 2013 (4 heures)

• Un effort de rédaction et de présentation est demandé pour l'ensemble du contrôle.

• On n'oubliera pas de quantifier chaque fois que nécessaire, en particulier pour les calculs de dérivées.
On écrira par exemple : « $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ » ; « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ».

I. (9 points)

Pour chaque affirmation, dire sans justifier si elle est vraie ou fausse (compléter le tableau sur la feuille fournie avec le sujet par V ou F).

Chaque réponse juste rapporte 1 point ; chaque réponse fausse enlève un point.
L'absence de réponse n'enlève ni n'ajoute aucun point.

1°) L'expression $x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$ est positive ou nulle pour tout réel x.

2°) La fonction $x \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^3$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3}$.

3°) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est constante.

4°) Pour tout réel x, on a : $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}=\mathrm{e}^x-1$.

5°) La fonction $x \mapsto 1+(x-1)\mathrm{e}^x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

6°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}$ est $\mathbb{R}$.

7°) L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x-1}=1$ est $\left\{\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right\}$.

8°) Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{\left|1-\mathrm{e}^{2x}\right|+1}=\mathrm{e}^x$.

9°) Pour tout réel x non nul, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(1-\mathrm{e}^x\right)^2}=\dfrac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

II. (11 points)

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) On note u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$.
On a $f(x)=u(x)\times v(x)$ pour tout réel x.
On sait que les fonctions u et v sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (propriété du cours).
Quelle propriété du cours permet d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$? Citer cette propriété.

2°) Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ (résultat sous forme factorisée).

3°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer tous les extremums de f au brouillon (valeurs exactes) et compléter le tableau.

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.
Rédiger avec précision.

5°) On donne l'algorithme ci-dessous (f désigne la fonction précisée au début de l'exercice).

Variables : a, b et m sont des nombres réels.

Initialisations :
Affecter à a la valeur 0
Affecter à b la valeur 1

Traitement :
Tantque $b-a>0{,}1$ **Faire**
  Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m)<1$ alors
    Affecter à a la valeur m
    Sinon affecter à b la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sorties :
Afficher a
Afficher b

Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ? Répondre par une phrase.

5°) À l'aide de ce qui précède, donner dans un tableau le signe de $x^2\mathrm{e}^x-1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la fonction $g : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que g admet un minimum global m sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et que $m = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$.

III. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2} + 3 - x$.

1°) Justifier brièvement que l'ensemble de définition de f est l'intervalle [– 3 ; 3].*

2°) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $\left]-3\,;3\right[$ et calculer $f'(x)$ pour $-3 < x < 3$.
On présentera le résultat sous la forme d'un seul quotient simplifié.

Dans la suite, on admettra sans démonstration que f n'est pas dérivable en 3 (à gauche) ni en – 3 (à droite).

3°) On donne ci-dessous le tableau de signes de $u(x) = x + \sqrt{9-x^2}$ sur l'intervalle [– 3 ; 3].

x	-3		$-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$		3
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$	

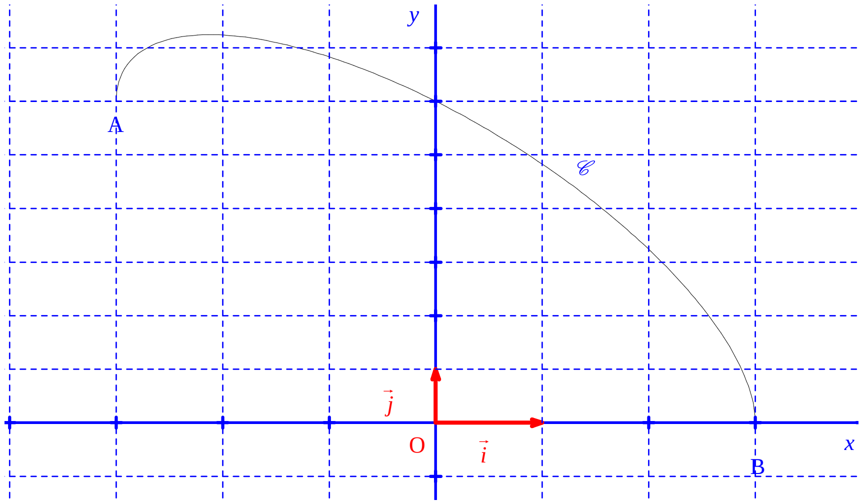
En utilisant le signe de $u(x)$, dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.
Calculer tous les extremums au brouillon (valeurs exactes) et compléter le tableau.

4°) On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives – 3 et 3.
Conjecturer les coordonnées d'un point E de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente T est parallèle à (AB).
Vérifier que le point E proposé convient.
Tracer sur le graphique la tangente T ainsi que la tangente horizontale (on nommera F le point en lequel la tangente est horizontale et l'on fera apparaître les valeurs exactes de ses coordonnées avec des pointillés ; on ne demande pas de justification écrite sur la copie).

* On rappelle la rédaction de recherche d'un ensemble de définition :

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ ………………..

$\Leftrightarrow$ ………………..



IV. (8 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

On note A et B les points d'affixes respectives $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

1°) Calculer les affixes des points A' et B' sous forme algébrique. Compléter le graphique sur la feuille de réponses en plaçant A' et B'.

2°) Démontrer brièvement que les points O, A, A', d'une part, et O, B, B', d'autre part, sont alignés.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble E des points M tels que O, M, M' soient alignés.

1°) Soit M un point quelconque de P, d'affixe z, distinct de O.
Démontrer que $M \in E \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R}$.

2°) On pose $z = x + iy$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$.
Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$.

3°) En déduire l'ensemble E (on utilisera la décomposition $\dfrac{z^2+1}{z} = z + \dfrac{1}{z}$ pour $z \neq 0$).

V. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} + 2u_n = -3$ pour tout entier naturel *n*.

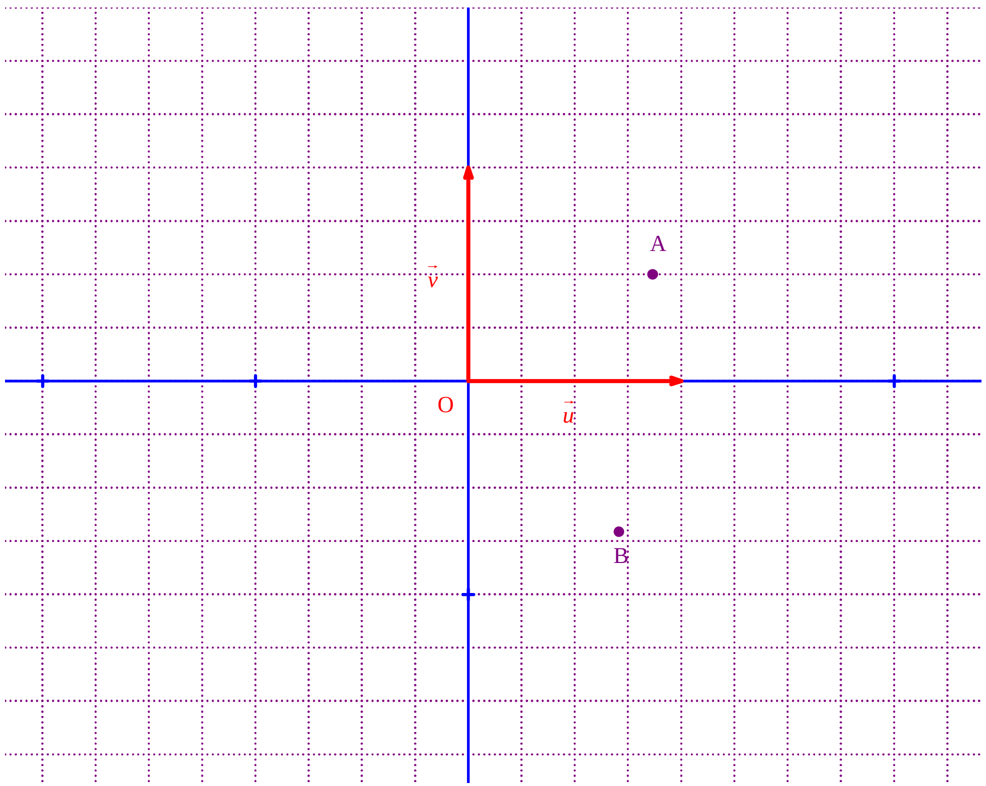
1°) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$, démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = (-2)^n - 1$.

Indication : programmer les deux suites sur la calculatrice.

2°) À l'aide des congruences, démontrer que u_n est divisible par 3 pour tout entier naturel *n*.

3°) Déterminer les entiers naturels *n* tels que u_n soit divisible par 5.

IV. (8 points)



TS1

Contrôle du 18 novembre 2013

Prénom et nom : ……………………………………………………

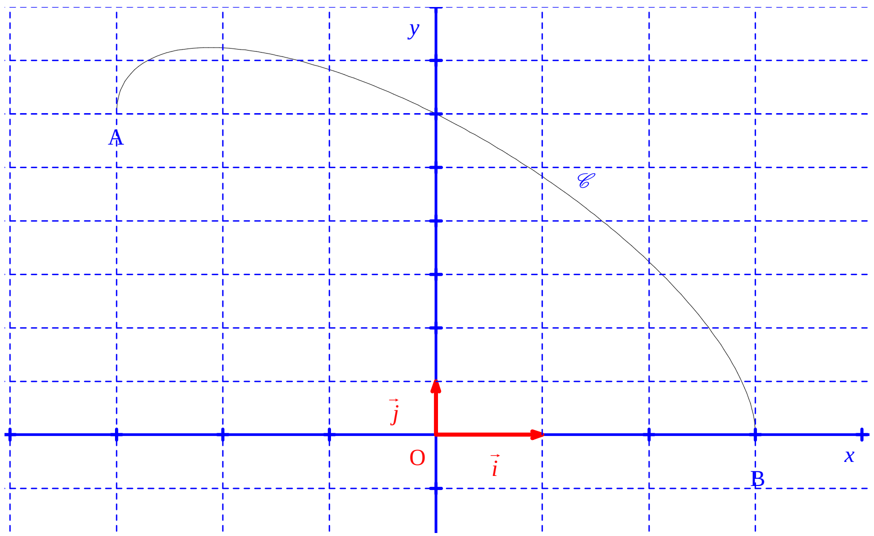
Note : ……/20

I (9 points)	II (11 points)	III (7 points)	IV (8 points)	V (5 points)

I. (9 points)

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	**Total**
Réponse										

III. (7 points)



Version sèche de l'exercice III avec une légère modification dans la question 4°)

(version à savoir faire sous cette forme)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}+3-x$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2°) Justifier que *f* est dérivable sur l'intervalle]– 3 ; 3[et calculer $f'(x)$ pour $-3<x<3$.
On présentera le résultat sous la forme d'un seul quotient simplifié.

Dans la suite, on admettra sans démonstration que *f* n'est pas dérivable en 3 (à gauche) ni en – 3 (à droite).

3°) On donne ci-dessous le tableau de signes de $u(x)=x+\sqrt{9-x^2}$ sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

x	-3		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		3
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$	

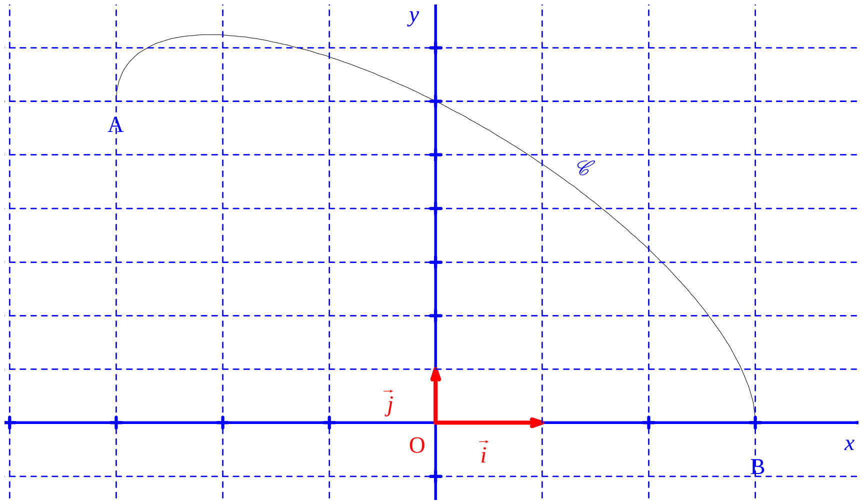
En utilisant le signe de $u(x)$, dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.
Calculer tous les extremums au brouillon (valeurs exactes) et compléter le tableau.

4°) On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives – 3 et 3.
Déterminer les coordonnées du point E de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente *T* est parallèle à (AB).
Tracer sur le graphique la tangente *T* ainsi que la tangente horizontale (on nommera F le point en lequel la tangente est horizontale et l'on fera apparaître les valeurs exactes de ses coordonnées avec des pointillés ; on ne demande pas de justification écrite sur la copie).

* On rappelle la rédaction de recherche d'un ensemble de définition :

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ ………………..

$\Leftrightarrow$ ………………..



Corrigé du contrôle du 18-11-2013

I.

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
Réponse	V	F	V	F	F	F	V	V	V

1°) L'expression $x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$ est positive ou nulle pour tout réel x.

2°) La fonction $x \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^3$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{3\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^3}$.

$$f(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^3$$

$$f'(x)=3\times\frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}\times\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)^2 \quad \text{(formule } nu'\times u^{n-1}\text{)}$$

$$=\frac{3\mathrm{e}^{3x}}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^4}$$

3°) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est constante.

4°) Pour tout réel x, on a : $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1}=\sqrt{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}=\left|\mathrm{e}^x-1\right|$.

5°) La fonction $x \mapsto 1+(x-1)\mathrm{e}^x$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

6°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x}$ est $\mathbb{R}$.

7°) L'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x-1}=1$ est $\left\{\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\right\}$.

On résout l'équation $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x-1}=1 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}=1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \quad \left(\text{car } \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}>0\right)$$

8°) Pour tout réel $x\geqslant 0$, on a $\sqrt{\left|1-\mathrm{e}^{2x}\right|+1}=\mathrm{e}^x$.

$\forall x\geqslant 0 \quad \mathrm{e}^{2x}\geqslant 1$ donc $\forall x\geqslant 0 \quad 1-\mathrm{e}^{2x}\leqslant 0$ donc $\forall x\geqslant 0 \quad \left|1-\mathrm{e}^{2x}\right|=\mathrm{e}^{2x}-1$

Donc $\forall x\geqslant 0 \quad \sqrt{\left|1-\mathrm{e}^{2x}\right|+1}=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1+1}$

$$=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}$$

$$=\mathrm{e}^x$$

9°) Pour tout réel x non nul, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(1-\mathrm{e}^x\right)^2}=\dfrac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$.

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(1-\mathrm{e}^x\right)^2}=\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}-1}\right)^2=\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}-1}\right)^2=\frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)^2}=\frac{1}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

II.

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) On note u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$.

On a $f(x)=u(x)\times v(x)$ pour tout réel x.

On sait que les fonctions u et v sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (propriété du cours).

Quelle propriété du cours permet d'affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$? Citer cette propriété.

« Le produit de deux fonctions continues sur un intervalle I est une fonction continue sur I. »

« La fonction produit de deux fonctions continues sur un intervalle I est continue sur I. »

2°) Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ (résultat sous forme factorisée).

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (u est la fonction « carré » et v est la fonction « exponentielle »).

La fonction f est donc le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, de ce fait, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Autre rédaction (Éloi Charpentier) :

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et f est formée du produit de ces fonctions, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x$$
$$= x\mathrm{e}^x(2+x)$$

3°) Dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ ainsi que les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer tous les extremums de f au brouillon (valeurs exactes) et compléter le tableau.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de x		–		–	0	+	
Signe de e^x		+		+		+	
Signe de $x+2$		–	0	+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	$\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	↘	0	↗	

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.
Rédiger avec précision.

Calculons $f(1)=1^2\times\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $[0\,;1]$.

On a $f(0)<1<f(1)$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.

5°) On donne l'algorithme ci-dessous (f désigne la fonction précisée au début de l'exercice).

Variables : a, b et m sont des nombres réels.

Initialisation :
Affecter à a la valeur 0
Affecter à b la valeur 1

Traitement :
Tantque $b-a>0{,}1$ **Faire**
  Affecter à m la valeur $\frac{a+b}{2}$
  Si $f(m)<1$ alors
    Affecter à a la valeur m
    Sinon affecter à b la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sorties :
Afficher a
Afficher b

Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ? Répondre par une phrase.

L'algorithme proposé est un algorithme de dichotomie.
Les valeurs affichées de a et b affichées en sortie par l'algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,1.

5°) À l'aide de ce qui précède, donner dans un tableau le signe de $x^2\mathrm{e}^x-1$ pour $x\in\mathbb{R}$.

On observe que $\frac{1}{\mathrm{e}^2}<1$ car $\mathrm{e}>2$.

Donc on en déduit que :

- si $x>\alpha$, alors $f(x)>1$ d'où $x^2\mathrm{e}^x-1>0$;
- si $x<\alpha$, alors $f(x)<1$ d'où $x^2\mathrm{e}^x-1<0$;
- si $x=\alpha$, alors $f(\alpha)=1$ d'où $\alpha^2\mathrm{e}^\alpha-1=0$.

On en déduit le tableau de signes demandé.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $x^2\mathrm{e}^x-1$		–	0	+	

Partie 2

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer que g admet un minimum global m sur $]0\,;+\infty[$ et que $m = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$.

La fonction exponentielle et la fonction « inverse » sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

g étant la somme de ces deux fonctions, elle est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2}$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
SGN de $x^2\mathrm{e}^x - 1$		$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de x^2		$+$	$0^{\text{dén}}$	$+$		$+$	
SGN de $g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, g admet $m = g(\alpha)$ pour minimum global sur $]0\,;+\infty[$.

Calculons ce minimum global m.

$$m = g(\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

Or $\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha} = 1$ donc $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

D'où $m = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}$.

III. Étude d'une fonction irrationnelle

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{9 - x^2} + 3 - x$.

La fonction n'est pas une fonction polynôme ni une fonction rationnelle.

1°) Justifier brièvement que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-3\,;3]$.

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow 9 - x^2 \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{(règle du signe d'un trinôme ou tableau de signes)}$$

On en déduit que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-3\,;3]$.

2°) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $]-3\,;3[$ et calculer $f'(x)$ pour $-3 < x < 3$.
On présentera le résultat sous la forme d'un seul quotient simplifié.

$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$ est dérivable sur l'intervalle $]-3\,;3[$.

La fonction $x \mapsto 3 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par restriction, sur $]-3\,;3[$.

f étant la somme de ces deux fonctions, on en déduit que f est dérivable sur $]-3\,;3[$.

$$\forall x \in]-3\,;3[\qquad f'(x) = -1 - \frac{2x}{2\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\forall x \in]-3\,;3[\qquad = -1 - \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\forall x \in]-3\,;3[\qquad = \frac{-\sqrt{9 - x^2} - x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Dans la suite, on admettra sans démonstration que f n'est pas dérivable en 3 (à gauche) ni en – 3 (à droite).

3°) On donne ci-dessous le tableau de signes de $u(x) = x + \sqrt{9 - x^2}$ sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

x	-3		$-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$		3
Signe de $u(x)$		$-$	0	$+$	

En utilisant le signe de $u(x)$, dresser un tableau récapitulatif comprenant l'étude précise et détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f sur l'intervalle $[-3\,;3]$.
Calculer tous les extremums au brouillon (valeurs exactes) et compléter le tableau.

On remarque que $\forall x \in]-3\,;3[\quad f'(x) = -\dfrac{u(x)}{\sqrt{9 - x^2}}$.

x	-3		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		3
SGN de $-u(x)$		$+$	0	$-$	
SGN de $\sqrt{9-x^2}$	0	$+$		$+$	0
SGN de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	6	$\nearrow$	$3+3\sqrt{2}$	$\searrow$	0

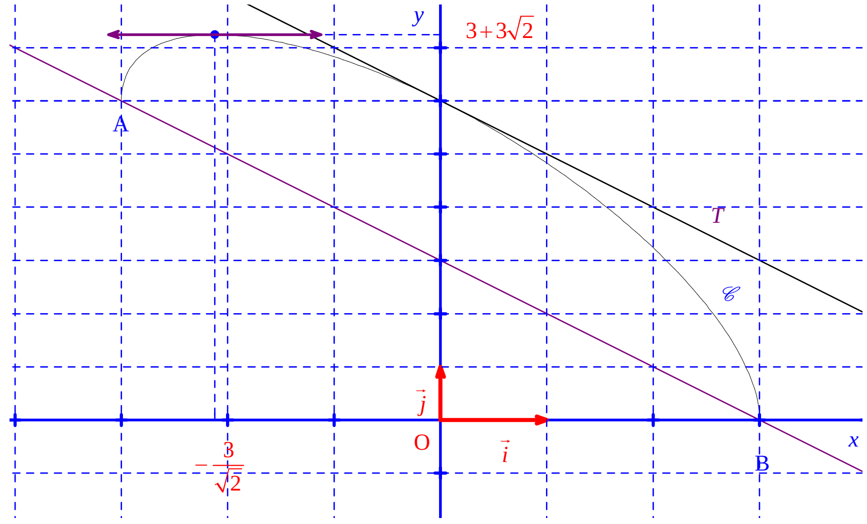
4°) On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives – 3 et 3.

Conjecturer les coordonnées d'un point E de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente T est parallèle à (AB).

Vérifier que le point E proposé convient.

Tracer sur le graphique la tangente T ainsi que la tangente horizontale (on nommera F le point en lequel la tangente est horizontale et l'on fera apparaître les valeurs exactes de ses coordonnées avec des pointillés ; on ne demande pas de justification écrite sur la copie).



On peut conjecturer que $\mathscr{C}$ admet une tangente T parallèle à (AB) au point E d'abscisse 0.

Vérifions cette conjecture.

Le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point E d'abscisse 0 est égal à $f'(0) = -1$.

Le coefficient directeur de (AB) (qui existe bien puisque $x_\text{A} \neq x_\text{B}$) est égal à $\dfrac{y_\text{B} - y_\text{A}}{x_\text{B} - x_\text{A}} = \dfrac{0-6}{3-(-3)} = -1$.

Les coefficients directeurs sont égaux donc (AB) et T sont parallèles.

$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

IV.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

On note A et B les points d'affixes respectives $\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ et $\dfrac{1-\text{i}}{\sqrt{2}}$.

1°) Calculer les affixes des points A' et B' sous forme algébrique. Compléter le graphique sur la feuille de réponses en plaçant A' et B'.

$$\begin{aligned}
z_{\text{A}'} &= \left(z_\text{A}\right)^2 + 1 \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{3+2\text{i}\sqrt{3}-1}{4} + 1 \\
&= \frac{2+2\text{i}\sqrt{3}}{4} + 1 \\
&= \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2} + 1 \\
&= \frac{3+\text{i}\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{\text{B}'} &= \left(z_\text{B}\right)^2 + 1 \\
&= \left(\frac{1-\text{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{1-2\text{i}-1}{2} + 1 \\
&= 1-\text{i}
\end{aligned}$$

2°) Démontrer brièvement que les points O, A, A', d'une part, et O, B, B', d'autre part, sont alignés.

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$z_{\overrightarrow{OA'}} = z_{A'} = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

On a $z_{\overrightarrow{OA'}} = \sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{OA}}$.

Par suite, $\overrightarrow{OA'} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

On en déduit que les points O, A, A' sont alignés.

$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z_{\overrightarrow{OB'}} = z_{B'} = 1-i = \sqrt{2}\times\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

On a $z_{\overrightarrow{OB'}} = \sqrt{2}\times z_{\overrightarrow{OB}}$.

Par suite, $\overrightarrow{OB'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires.

On en déduit que les points O, B, B' sont alignés.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble E des points M tels que O, M, M' soient alignés.

1°) $M(z)$ avec $z \neq 0$

Démontrons que $M \in E \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R}$.

On répond à cette question sans calcul.

$M \in E \Leftrightarrow$ O, M, M' sont alignés

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $z' = \lambda z$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\dfrac{z'}{z} = \lambda$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\dfrac{z'}{z} = \lambda$

$\Leftrightarrow \dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R}$

L'équivalence est démontrée.

2°) On pose $z = x+iy$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0\,;0)\}$.

Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

3°) Déduisons-en l'ensemble E (on utilisera la décomposition $\dfrac{z^2+1}{z} = z + \dfrac{1}{z}$ pour $z \neq 0$).

- On considère un point M du plan distinct de O.

$$\begin{aligned}
M \in E &\Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x+iy+\frac{1}{x+iy} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x+\frac{x}{x^2+y^2}+iy\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 1-\frac{1}{x^2+y^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2+y^2 = 1
\end{aligned}$$

- Pour M = O, O, M, M' sont alignés de manière évidente.

On en déduit que E est la réunion de l'axe des abscisses et du cercle de centre O et de rayon 1.

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} + 2u_n = -3$ pour tout entier naturel n.

1°) En considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (-2)^n - 1$.

Indication : programmer les deux suites sur la calculatrice.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\
&= -2u_n - 3 + 1 \\
&= -2u_n - 2 \\
&= -2(u_n + 1) \\
&= -2v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (-2)^n$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-2)^n - 1$.

2°) À l'aide des congruences, démontrer que u_n est divisible par 3 pour tout entier naturel n.

Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $-2 \equiv 1$ [3] donc $(-2)^n \equiv 1^n$ [3].

On en déduit que $(-2)^n \equiv 1$ [3].

Par suite, $(-2)^n - 1 \equiv 0$ [3] soit $u_n \equiv 0$ [3] ce qui permet d'affirmer que $3 \mid u_n$.

3°) Déterminer les entiers naturels n tels que u_n soit divisible par 5.

On note r le reste de la division euclidienne de n par 4.

r peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.

1^er cas : $r = 0$

Dans ce cas, on peut écrire $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= (-2)^{4k} - 1 \\ &= \left[(-2)^4\right]^k - 1 \end{aligned}$$

Or $(-2)^4 \equiv 1$ [5].

Donc $u_n \equiv 1^k - 1$ [5] soit $u_n \equiv 0$ [5].

Donc dans ce cas, $5 \mid u_n$.

2^e cas : $r = 1$

Dans ce cas, on peut écrire $n = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= (-2)^{4k+1} - 1 \\ &= -2 \times \left[(-2)^4\right]^k - 1 \end{aligned}$$

Or $(-2)^4 \equiv 1$ [5].

Donc $u_n \equiv -2 - 1$ [5] soit $u_n \equiv -3$ [5].

Donc dans ce cas, $5 \nmid u_n$.

3^e cas : $r = 2$

Dans ce cas, on peut écrire $n = 4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= (-2)^{4k+2} - 1 \\ &= (-2)^2 \times \left[(-2)^4\right]^k - 1 \end{aligned}$$

Or $(-2)^4 \equiv 1$ [5].

Donc $u_n \equiv 4 - 1$ [5] soit $u_n \equiv 3$ [5].

Donc dans ce cas, $5 \nmid u_n$.

4^e cas : $r = 3$

Dans ce cas, on peut écrire $n = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_n &= (-2)^{4k+3} - 1 \\ &= (-2)^3 \times \left[(-2)^4\right]^k - 1 \end{aligned}$$

Or $(-2)^4 \equiv 1$ [5].

Donc $u_n \equiv -8 - 1$ [5] soit $u_n \equiv -9$ [5].

Donc dans ce cas, $5 \nmid u_n$.

Conclusion :

D'après l'étude, $5 \mid u_n$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par 4 est égal à 0 soit si et seulement si n est divisible par 4.

Les entiers naturels n tels que u_n soit divisible par 5 sont les multiples de 4.