$1^{\text{ère}}$ S1

Devoir pour le mardi 19 novembre 2013

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-1| = 2|x|$ (1).

II. Le plan est muni d'un repère $\boldsymbol{\mathcal{R}} = (\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et D la droite d'équation $y = 2x - 5$.

1°) Réaliser un graphique avec *Geogebra*.
Déterminer alors graphiquement les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D ($x_{\text{A}} < x_{\text{B}}$).

2°) Déterminer par le calcul les coordonnées de A et B (valeurs exactes sous forme simplifiée).

3°) *Question facultative :*

On considère le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}}' = (\text{O}, \vec{I}, \vec{J})$ où $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Soit M un point quelconque du plan, $(x\,;y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ et $(X\,;Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}}'$.
En décomposant de deux manières le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, exprimer *x* et *y* en fonction de *X* et *Y*.

b) Déterminer alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\boldsymbol{\mathcal{R}}'$ sous la forme $Y = f(X)$.

On pourra rédiger ainsi : « M $\in \mathcal{C}$ si et seulement si ……

si et seulement si …… ».

En déduire la nature de $\mathcal{C}$.

Corrigé

I. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\,x-1\,| = 2|\,x\,|$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$|\,x-1\,| = |\,2x\,|$

$x-1 = 2x$ ou $x-1 = -\,2x$ *

$x = -\,1$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

* On utilise la propriété :

$$|a| = |b| \text{ si et seulement si } a = b \text{ ou } a = -\,b.$$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$$\boldsymbol{S = \left\{-1\,;\frac{1}{3}\right\}}$$

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Il y a d'autres méthodes possibles : disjonction de cas (compliqué), élévation au carré des deux membres (assez simple)...

II.

$\mathcal{C}$: $x^2 - y^2 = 1$

D : $y = 2x - 5$

1°)

• Réalisons un graphique avec *Geogebra*.

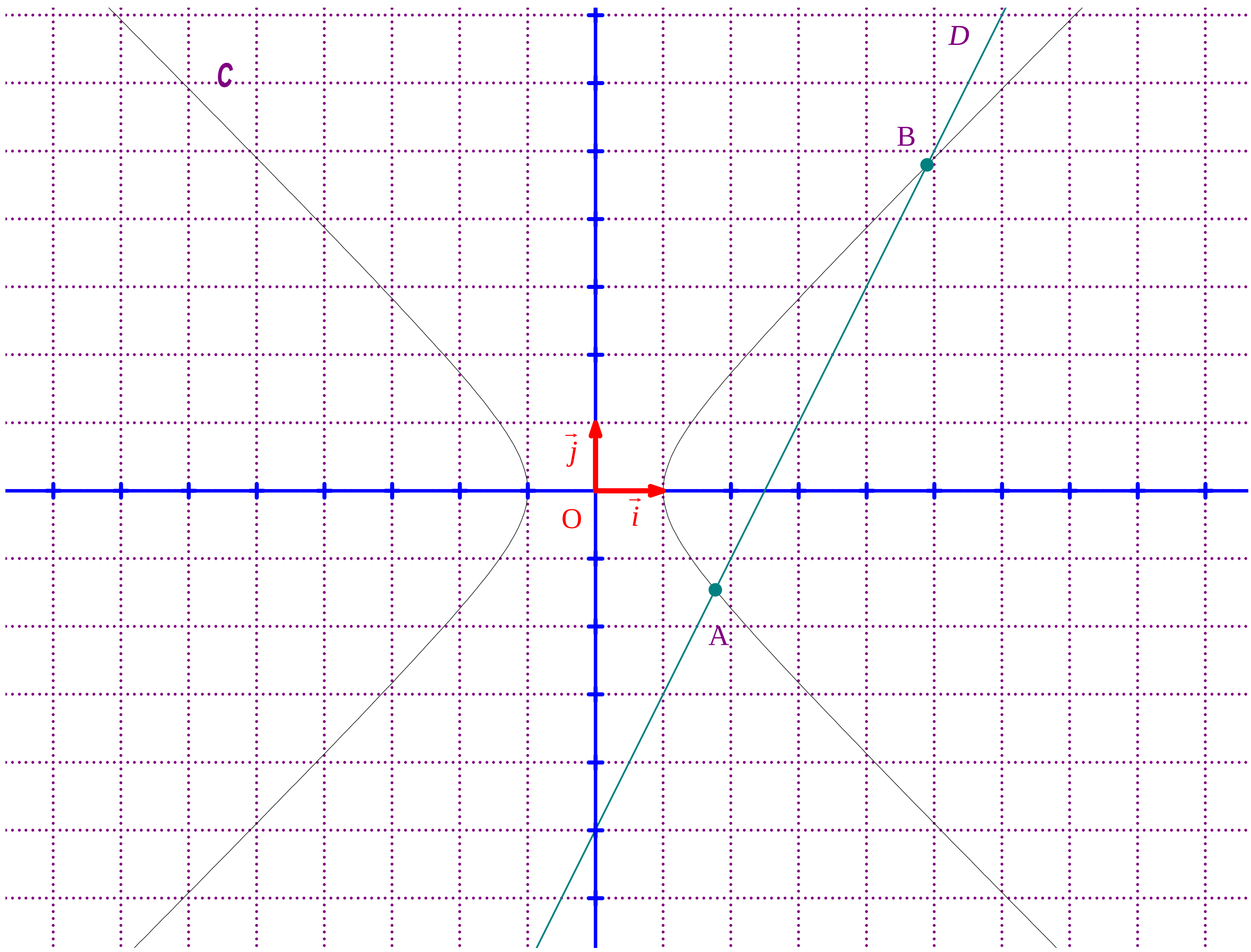
Voir ci-dessous.

• Déterminons alors graphiquement les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et D ($x_A < x_B$).

Graphiquement, on lit :

$x_A \approx 1{,}8$ et $y_A \approx -1{,}5$

$x_B \approx 4{,}9$ et $y_B \approx 4{,}8$.



2°) **Déterminons par le calcul les coordonnées de A et B (valeurs exactes sous forme simplifiée).**

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation :
$x^2-(2x-5)^2=1$ (1)

(1) est équivalente à $-3x^2+20x-26=0$ (1').

(1') est une équation du second degré.

Son discriminant réduit est $\Delta'=100-3\times 26=22$.

$\Delta'>0$ donc (1') admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{10-\sqrt{22}}{3}$ et $x_2=\dfrac{10+\sqrt{22}}{3}$.

Donc $\text{A}\left(\dfrac{10-\sqrt{22}}{3}\,;\dfrac{5-2\sqrt{22}}{3}\right)$ et $\text{B}\left(\dfrac{10-\sqrt{22}}{3}\,;\dfrac{5+2\sqrt{22}}{3}\right)$.

Les ordonnées ont été calculées grâce à l'équation de D.

Avec la calculatrice, on trouve : $x_{\text{A}}=1,76986141...$ et $x_{\text{B}}=4,896805253...$.

$y_{\text{A}}=-1,46027717...$ et $y_{\text{B}}=4,79361050...$.

On retrouve les valeurs obtenues graphiquement.

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel en résolvant le système $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y=2x-5\end{cases}$.

Autre méthode :

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions du système $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y=2x-5\end{cases}$.

3°) ***Question facultative :***

$\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$

$\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$

$\boldsymbol{R}' = \left(\mathrm{O}, \vec{I}, \vec{J}\right)$

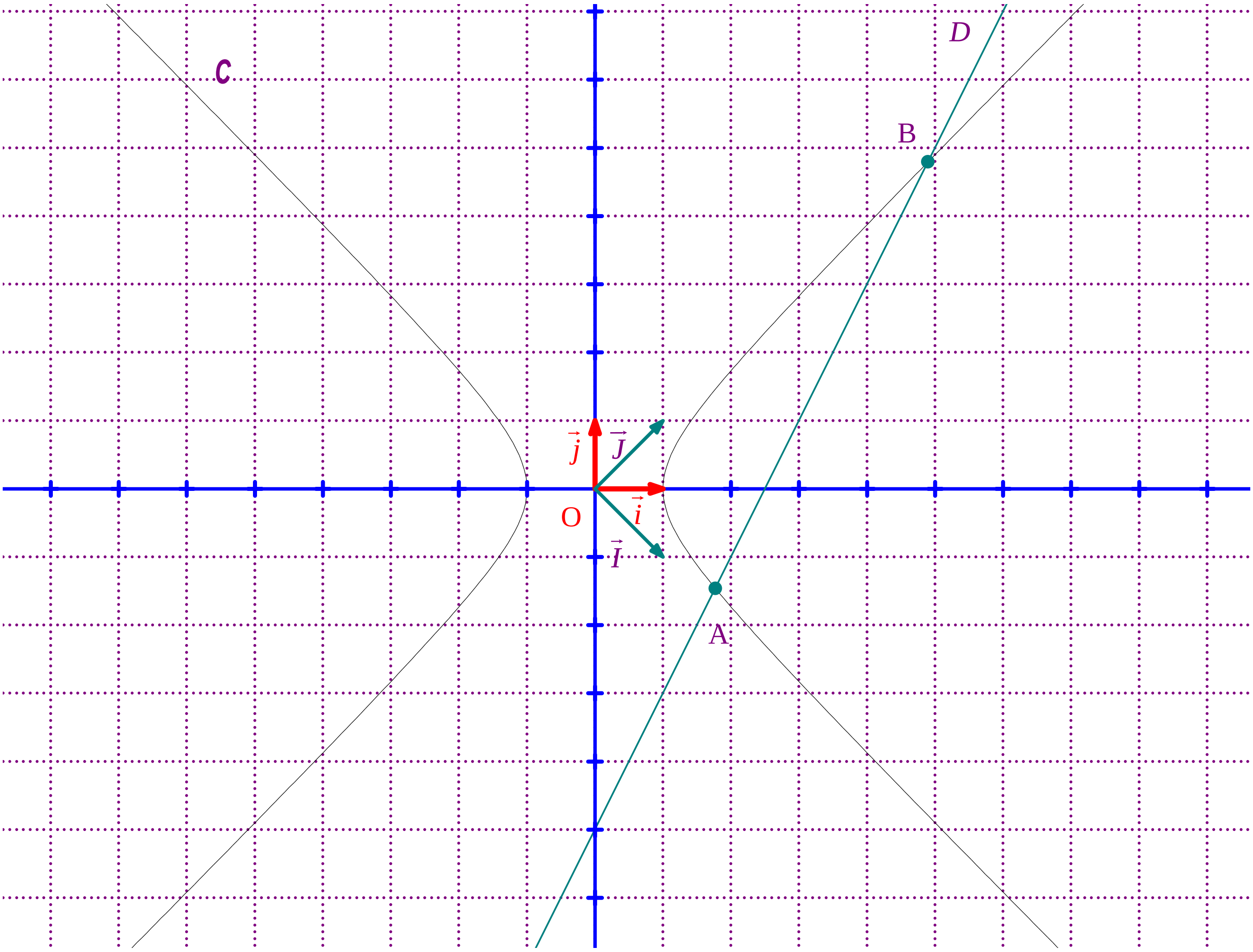
• *L'origine du repère ne change pas mais les vecteurs de vases changent.*

• *On peut faire apparaître le « nouveau » repère sur le graphique.*

M est un point quelconque du plan.

$(x\,;y)$: coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\boldsymbol{R}$

$(X\,;Y)$: coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\boldsymbol{R}'$



a) En décomposant de deux manières le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, exprimons *x* et *y* en fonction de *X* et *Y*.

M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère ***R*** donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

M a pour coordonnées $(X\;;Y)$ dans le repère ***R***' donc $\overrightarrow{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J}$.

Or $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{i} + \vec{j}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= X\left(\vec{i} - \vec{j}\right) + Y\left(\vec{i} + \vec{j}\right)\\ &= \left(X + Y\right)\vec{i} + \left(Y - X\right)\vec{j}\end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base*, on a $\begin{cases} x = X + Y \\ y = Y - X \end{cases}$.

* On veut dire par là que l'égalité $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ entraîne $x = x'$ et $y = y'$.

On dit que l'on a établi les **formules de changement de repère**.
On a exprimé les « anciennes » coordonnées (c'est-à-dire les coordonnées dans l'ancien repère ***R***) en fonction des « nouvelles » coordonnées (c'est-à-dire les coordonnées dans le nouveau repère ***R***').

b)

• Déterminons alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

M $\in \mathcal{C}$ si et seulement si $x^2 - y^2 = 1$

si et seulement si $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1$

si et seulement si $4XY = 1$

si et seulement si $X \neq 0$ et $Y = \dfrac{1}{4X}$

Une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est $Y = \dfrac{1}{4X}$.

• Déduisons-en la nature de $\mathcal{C}$.

D'après l'équation déterminée précédemment, $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : X \mapsto \dfrac{1}{4X}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

$\mathcal{C}$ est donc une hyperbole de centre O.