Fiche sur le second degré

I. Généralités

1°) Définition

On appelle **fonction polynôme du second degré** une fonction f vérifiant les deux conditions :

C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

C_2 : il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2°) Vocabulaire

- L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **polynôme ou trinôme du second degré en *x***.

- Les réels a, b, c sont appelés **coefficients du polynôme**.

- x est la **variable** du polynôme.

3°) Polynôme du second degré incomplet

Dans la définition, on doit avoir $a \neq 0$ mais b ou c peuvent être égaux à 0.
Dans ce cas, on dira que le **polynôme est incomplet**.

II. Discriminant

Définition

On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

III. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Règle

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

IV. Racines d'une équation du second degré

Définition

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ sont appelées
- les **racines** de l'équation
- les **racines** du polynôme ax^2+bx+c

Règle

$ax^2+bx+c\neq 0$ $(a\neq 0)$

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

1^er^ cas : $\boxed{\Delta>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2^e^ cas : $\boxed{\Delta=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=\dfrac{-b}{2a}$.

3^e^ cas : $\boxed{\Delta<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

V. Discriminant réduit

Règle

$ax^2+bx+c\neq 0$ $(a\neq 0)$

$b'=\dfrac{b}{2}$

$\boxed{\Delta'=b'^2-ac}$

1^er^ cas : $\boxed{\Delta'>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

2^e^ cas : $\boxed{\Delta'=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b'}{a}$.

3^e^ cas : $\boxed{\Delta'<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

VI. Somme et produit des racines

Règle

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

$\Delta\geqslant 0$

Le polynôme $f(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$.

On a : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Application aux racines évidentes

VII. Factorisation d'un polynôme du second degré

Règle de factorisation

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$\boxed{\Delta > 0}$

2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2

$f(x) = \underline{\underline{a}}\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

$\boxed{\Delta = 0}$

une racine double dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$f(x) = \underline{\underline{a}}\left(x - x_0\right)^2$

$\boxed{\Delta < 0}$

aucune racine dans $\mathbb{R}$

Pas de factorisation en facteurs du premier degré

VIII. Signe d'un polynôme du second degré

Règle du signe du trinôme

$$\boxed{f\left(x\right) = ax^2 + bx + c} \; (a \neq 0)$$

$\boxed{\Delta > 0}$

2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	SGN de a	

$\boxed{\Delta = 0}$

une racine double dans $\mathbb{R}$, x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN de a	

$\boxed{\Delta < 0}$

(aucune racine dans $\mathbb{R}$)

*

On dit que le polynôme est toujours du signe de *a* sauf pour *x* entre les racines.

*

x	$-\infty$		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	

IX. Recherche de deux nombres connaissant la somme et le produit

1°) Étude de la condition nécessaire

a et b sont deux réels.

a et b sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ d'inconnue x avec $S = a + b$ et $P = ab$.

2°) Étude de la condition suffisante

Si deux nombres sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors leur somme est égale à S et leur produit est égal à P.

X. Variations, extremums et représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \end{aligned}$$

2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

f admet un **minimum en** $x = -\dfrac{b}{2a}$.

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

f admet un **maximum en** $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Propriété 2

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad (a \neq 0)$$

2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

f admet un **minimum** pour $x = \alpha$.

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

f admet un **maximum** pour $x = \alpha$.

La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est une **parabole** de **sommet** S $\left| \begin{array}{l} x_S = -\dfrac{b}{2a} \\ y_S = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) \end{array} \right.$.

• Si $a > 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le haut**.

• Si $a < 0$, alors les deux branches infinies sont **tournées vers le bas**.

Si le **repère orthogonal**, $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour **axe de symétrie**.

LEXIQUE

Fonction polynôme du second degré **Fonction trinôme**	Fonction f vérifiant les deux conditions : C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ C_2 : il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$.
Polynôme du second degré	Expression de la forme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (x : la variable du polynôme)
Coefficients	a, b, c (N.B. : $a \neq 0$) c : coefficient constant
Polynôme du second degré incomplet	$b = 0$ ou $c = 0$
Racine d'un polynôme $ax^2 + bx + c$	Valeur de x qui annule le polynôme ou solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
Racine évidente	Racine que l'on trouve facilement ou que l'on trouve par calcul mental (souvent 0, 1, 2, – 1, – 2)
Forme canonique	$a(x-\alpha)^2 + \beta$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$ Sert à déterminer le nombre de racines du polynôme suivant son signe et à donner leurs expressions.
Discriminant réduit	$b' = \frac{b}{2}$ $\Delta' = b'^2 - ac$

Discriminant

Le discriminant d'une équation du second degré sert à :

- savoir si l'équation admet des solutions et leur nombre

- calculer ces solutions

Racines d'un polynôme sur le second degré

- détermination directe (factorisation)

- utilisation du discriminant

- racines évidentes

- utilisation d'un programme sur calculatrice (valeurs exactes ou approchées)

- utilisation d'un logiciel de calcul formel (valeurs exactes)

3 premières : « à la main »

2 dernières : « à l'aide d'outils de calcul