TS spécialité

Contrôle du jeudi 7 novembre 2013 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations. Ne rien écrire sur cette feuille en dehors de ce qui est demandé.

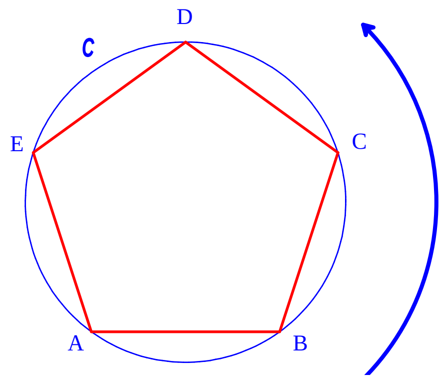
Prénom : ………………………… **Nom :** ……………………………………… **Note : …… / 20**

I. (4 points)

Sur la figure ci-contre, ABCDE est un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
Les sommets de ce pentagone découpent le cercle $\mathcal{C}$ en cinq arcs de même longueur.
Un point mobile M décrit le cercle $\mathcal{C}$ en partant de A.
Trouver le point d'arrivée de M lorsque M franchit 15 123 arcs consécutifs dans le sens :
a) de la flèche b) contraire de la flèche.
Répondre sans justifier.

a) ………………..

b) ………………..



II. (4 points)

Soit x et y deux entiers relatifs tels que l'on ait $x \equiv 7$ (modulo 9) et $y \equiv 4$ (modulo 9).
Déterminer le reste de la division euclidienne de $2x^2 - 5y^2$ par 9.

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points)

1°) En partant de $17 \equiv 4$ (modulo 13), démontrer que $17^2 \equiv 3$ (modulo 13) ; en déduire, sans utiliser la calculatrice, que $17^6 \equiv 1$ (modulo 13).
2°) En déduire le reste de la division euclidienne de $17^{2013} + 3 \times 17^{2014}$ par 13. Justifier brièvement.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points)

1°) Soit x un entier relatif quelconque. Compléter sans explication le tableau ci-dessous.

Reste de la division euclidienne de x par 4	**0**	**1**	**2**	**3**
Reste de la division euclidienne de x^2 par 4				

2°) Démontrer que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ (E), d'inconnues x et y entiers relatifs, n'admet pas de solution.
On raisonnera modulo 4.

V. (4 points)

Démontrer en utilisant les congruences que, pour tout entier naturel n, le nombre $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

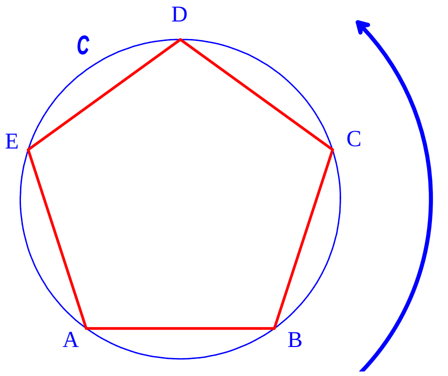
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Corrigé du contrôle du 7-11-2014

I.

Sur la figure ci-contre, ABCDE est un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
Les sommets de ce pentagone découpent le cercle $\mathcal{C}$ en cinq arcs de même longueur.
Un point mobile M décrit le cercle $\mathcal{C}$ en partant de A.



Trouver le point d'arrivée de M lorsque M franchit 15 123 arcs consécutifs dans le sens :
a) de la flèche b) contraire de la flèche.
Répondre sans justifier.

a) **D**

b) **C**

Méthode : on numérote les sommets dans un sens puis dans l'autre.

II.

Soit x et y deux entiers relatifs tels que l'on ait $x \equiv 7$ (modulo 9) et $y \equiv 4$ (modulo 9).
Déterminer le reste de la division euclidienne de $2x^2 - 5y^2$ par 9.

$x \equiv 7$ (modulo 9) d'où $x^2 \equiv 49$ (modulo 9). Or $49 \equiv 4$ (modulo 9)

Donc $x^2 \equiv 4$ (modulo 9) donc $2x^2 \equiv 8$ (modulo 9) (1).

$y \equiv 4$ (modulo 9) d'où $y^2 \equiv 16$ (modulo 9). Or $16 \equiv 7$ (modulo 9)

Donc $y^2 \equiv 7$ (modulo 9).

On a donc $-5y^2 \equiv -35$ (modulo 9).
Or $-35 \equiv 1$ (modulo 9).
Par suite, on a : $-5y^2 \equiv 1$ (modulo 9) (2).

En additionnant membre à membre (1) et (2), on obtient : $2x^2 - 5y^2 \equiv 0$ (modulo 9).

On en déduit que le reste de la division euclidienne de $2x^2 - 5y^2$ par 9 est 0.

On n'est pas obligé de « recongruer » à chaque fois.
Cela permet cependant d'avoir des calculs plus simples.

III.

1°) En partant de $17 \equiv 4$ (modulo 13), démontrer que $17^2 \equiv 3$ (modulo 13) ; en déduire, sans utiliser la calculatrice, que $17^6 \equiv 1$ (modulo 13).

On a : $17 \equiv 4$ (modulo 13) donc $17^2 \equiv 16$ (modulo 13).
Or $16 \equiv 3$ (modulo 13).
Donc $17^2 \equiv 3$ (modulo 13).

On a : $\left(17^2\right)^3 \equiv 27$ (modulo 13).
Or $27 \equiv 1$ (modulo 13).
Donc $17^6 \equiv 1$ (modulo 13).

2°) En déduire le reste de la division euclidienne de $17^{2013} + 3 \times 17^{2014}$ par 13. Justifier brièvement.

D'après la question 1°), on a observé que $17^6 \equiv 1$ (modulo 13).
Donc 17 élevé à toute puissance multiple de 6 est également congru à 1 modulo 13.
Donc on va effectuer les divisions euclidiennes de 2013 et 2014 par 6.

On a : $2013 = 6 \times 335 + 3$ et $2014 = 6 \times 335 + 4$.

Donc $17^{2013} \equiv 17^3$ (modulo 13) et $17^{2013} \equiv 17^4$ (modulo 13).

Or $17^3 \equiv 12$ (modulo 13) et $17^4 \equiv 9$ (modulo 13).

Donc on en déduit que $17^{2013} + 3 \times 17^{2014} \equiv 12 + 3 \times 9$ (modulo 13) d'où $17^{2013} + 3 \times 17^{2014} \equiv 0$ (modulo 13).

On en déduit que le reste de la division euclidienne de $17^{2013} + 3 \times 17^{2014}$ par 13 est 0.

Autre méthode : sans les congruences

$$\begin{aligned} 17^{2013} + 3 \times 17^{2014} &= 17^{2013} \times (1 + 3 \times 17) \\ &= 17^{2013} \times 52 \\ &= 17^{2013} \times 4 \times 13 \end{aligned}$$

Or $17^{2013} \times 4 \times 13 \in \mathbb{N}$ donc $13 \mid 17^{2013} + 3 \times 17^{2014}$

Le reste de la division euclidienne de $17^{2013} + 3 \times 17^{2014}$ par 13 est donc 0.

IV.

1°) Soit x un entier relatif quelconque. Compléter sans explication le tableau ci-dessous.

Reste de la division euclidienne de x par 4	**0**	**1**	**2**	**3**
Reste de la division euclidienne de x^2 par 4	**0**	**1**	**0**	**1**

2°) Démontrer que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$ (E), d'inconnues x et y entiers relatifs, n'admet pas de solution.
On raisonnera modulo 4.

(E) s'écrit de manière équivalente : $7x^2 = 4y^2 + 1$.
Donc si (x ; y) est solution de (E) alors $7x^2 \equiv 1$ (modulo 4).

Or d'après le tableau du 1°), on a : $x^2 \equiv 0$ (modulo 4) ou $x^2 \equiv 1$ (modulo 4).

Donc $7x^2 \equiv 0$ (modulo 4) ou $7x^2 \equiv 7$ (modulo 4).

Donc $7x^2$ ne peut pas être congru à 0 modulo 4.

V.

Démontrer en utilisant les congruences que, pour tout entier naturel n, le nombre $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.

On a : $3^2 \equiv 2$ (modulo 7).
Donc $3^{2n} \equiv 2^n$ (modulo 7).

On en déduit que $3^{2n+1} \equiv 3 \times 2^n$ (modulo 7).

Par suite, $2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 2^n \times 2^2 + 3 \times 2^n$ (modulo 7)

$2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 2^n \times 7$ (modulo 7)

$2^{n+2} + 3^{2n+1} \equiv 0$ (modulo 7)

On en déduit que $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ est divisible par 7.