On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ définies par $f(x)=x\sqrt{1-x}$ et $g(x)=\left|\,x\sqrt{1-x}\,\right|$.

1°) Démontrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et calculer $f'(x)$.
f est-elle dérivable à gauche de 1 ?
Étudier le sens de variation de f.

Étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan rapporté ay repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Tracer la tangente T en O et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T.

2°) Après justification, tracer la courbe Γ de g et la droite d'équation $y=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Démontrer que l'équation $\left|\,x\sqrt{1-x}\,\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ (E) admet trois solutions x_1, x_2, x_3 vérifiant $-\dfrac{1}{3}<x_1<0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$.

3°) Pour $i\in\{1, 2, 3\}$, on pose $u_i=\dfrac{3}{2}\left(x_i-\dfrac{1}{3}\right)$.

Démontrer qu'il existe un unique $\theta_i\in[0\,;\pi]$ tel que $u_i=\cos\theta_i$.

4°) Démontrer que θ_1, θ_2, θ_3 sont solutions de l'équation $\cos(3\theta)=\dfrac{1}{2}$ et $\theta\in[0\,;\pi]$.

En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2, x_3.