Devoir d'approfondissement sur moyennes et fonctions

I. Moyenne

Partie A

Étant donnés deux réels *x* et *y* strictement positifs, on pose :

$a = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique)

$g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique)

$h = \dfrac{2xy}{x+y}$ (moyenne harmonique ; on a $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$)

$q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ (moyenne quadratique).

1°) Calculer *a*, *g*, *h*, *q* pour $x = 2$ et $y = 3$. Les comparer.

2°) Démontrer que l'ordre trouvé est indépendant de *x* et *y*.

Partie B

Étant donnés *n* réels strictement positifs x_1, x_2, … , x_n, on pose :

$a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ (moyenne arithmétique des *n* nombres)

$q = \sqrt{\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} x_i^{\,2}}{n}}$ (moyenne quadratique des *n* nombres).

1°) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i - a\right)$ puis $S_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i - a\right)^2$ en fonction de *n*, *a*, *q*.

2°) Démontrer que $a \leqslant q$.

II. Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x - m|x-1|$.

On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Après une étude convenable, tracer les représentations graphiques de deux couleurs différentes :
$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ (même graphique) ;
$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_{-2}$ (2e graphique) ;
$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}}$ (3e graphique).

2°) Soit α un réel quelconque. On considère les points $M\left|\begin{array}{l}1+\alpha\\ f_m(1+\alpha)\end{array}\right.$ et $M'\left|\begin{array}{l}1-\alpha\\ f_{-m}(1-\alpha)\end{array}\right.$.

Quelles sont les coordonnées du milieu de $[MM']$? Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{-m}$?

3°) Discuter, suivant les valeurs de m, l'équation $f_m(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4°) Pour quelles valeurs de m, f_m est strictement croissante sur $\mathbb{R}$? strictement décroissante sur $\mathbb{R}$?