Contrôle du jeudi 17 octobre 2013 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………

Note : ….. / 20

• Écrire très lisiblement, au stylo à plume, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

• Ne rien écrire d'autre que ce qui est demandé, ne rien surligner sur l'énoncé.

I. (3 points)

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\dfrac{3}{\left(x^2-1\right)^4}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$	$f'(x)=$ …………………………………………………………
2°)	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\mathrm{I}=]0;+\infty[$	$f'(x)=$ …………………………………………………………
3°)	$f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=$ …………………………………………………………

II. (7 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ (détailler 3 étapes de calcul, sans justifier la dérivabilité de *f* sur $]0;+\infty[$).

………

………

………

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.
Calculer les extremums (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
SGN de $3x-1$	
SGN de $2\sqrt{x}$	
SGN de $f'(x)$	
Variations de *f*	

3°) Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $\dfrac{1}{9}$ et 1.
On note T et T' les tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement en A et B. Démontrer que l'on a : $T \perp T'$.

………

………

………

………

………

………

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[1;2]$.
Donner sans justifier l'approximation décimale d'ordre 5 par défaut de *a*.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs arrondies au millième de :

a) S_{50} et S'_{50} ;

b) S_{100} et S'_{100}.

$S_{50} \approx$ ....
$S'_{50} \approx$ ....
$S_{100} \approx$ ....
$S'_{100} \approx$ ....

2°) Comparer S_n et S'_n pour $n \geqslant 1$ (détailler la démarche ; rédiger de manière concise).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note A, B, C, D les points d'affixes respectives $1+\text{i}$, $-1-\text{i}$, $1+2\text{i}$, 1.

À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

1°) Soit M un point quelconque de [AB], d'affixe $z = \lambda(1+\text{i})$ où λ est un réel appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Exprimer les coordonnées cartésiennes $(x' ; y')$ de M' en fonction de λ sans détailler les calculs.

$x' =$ .... et $y' =$ ....

2°) En déduire que M' appartient à une droite (à déterminer).

On a ………………….. donc $\text{M}' \in (........)$.

3°) Compléter la phrase :

Lorsque M décrit le segment [AB],

λ décrit l'intervalle …………………… ;

$2\lambda^2$ décrit l'intervalle …………………… .

4°) En déduire l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

………

………

V. (2 points)

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. On donnera les résultats directement.

Soit a un réel strictement positif. On aurait pu mettre positif ou nul, la formule reste valable.

1°) Exprimer en fonction de a le nombre N d'entiers relatifs appartenant à l'intervalle $[-a ; a]$ (on rappelle que a est un réel).

$N =$ ....

2°) On se place dans le plan P muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On note F_a l'ensemble des points $\text{M}(x ; y)$ tels que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$.

Exprimer en fonction de a le nombre N' de points de F_a à coordonnées entières (c'est-à-dire dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs).

$N' =$ ....

Corrigé du contrôle du 17-10-2013

I.

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie et dérivable sur un ensemble I.
Compléter la colonne de droite donnant l'expression de $f'(x)$ dans chaque cas (calculs au brouillon).

1°)	$f(x)=\dfrac{3}{(x^2-1)^4}$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$	$f'(x)=-\dfrac{24x}{(x^2-1)^5}$
2°)	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	$\mathrm{I}=]0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$
3°)	$f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\mathrm{I}=\mathbb{R}$	$f'(x)=-4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

3°) On applique la formule de dérivation $(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=2\times\left[-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

II.

On considère la fonction $f: x\mapsto(x-1)\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et l'on note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$ (détailler 3 étapes de calcul).

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=1\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x-1)$$
$$=\frac{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+x-1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

2°) Compléter le tableau récapitulatif suivant donnant le signe de la dérivée et les variations de la fonction *f*.
Calculer les extremums (valeurs exactes) au brouillon et compléter le tableau.

Sur les lignes consacrées aux signes des expressions, on doit porter des 0 pour chaque valeur d'annulation.

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
SGN de $3x-1$		$-$	0	$+$	
SGN de $2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de *f*	0	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	

3°) Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $\dfrac{1}{9}$ et 1.
On note T et T' les tangentes à $\mathscr{C}$ respectivement en A et B. Démontrer que l'on a : $T\perp T'$.

On calcule les coefficients directeurs de T et T' (inutile de chercher des équations).

Le coefficient directeur de T est $f'\left(\dfrac{1}{9}\right)=-1$.

Le coefficient directeur de T' est $f'(1)=1$.

Le produit des coefficients directeurs de T et T' est égal à – 1 donc $T\perp T'$ (car le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé).

On rappelle la propriété :

Dans un repère orthonormé, deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à – 1.

4°) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution *a* dans l'intervalle $[1;2]$.
Donner sans justifier l'approximation décimale d'ordre 5 par défaut de *a*.

La fonction *f* est continue sur l'intervalle [1 ; 2] (comme produit de deux fonctions continues).
La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 2].

On a : $f(1)=0$ et $f(2)=\sqrt{2}$.

$0\leqslant1\leqslant\sqrt{2}$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution dans l'intervalle [1 ; 2].

On a : $f(1,75487)<1$ et $f(1,75488)>1$.

Donc $1,75487<a<1,75488$.

Par suite, on a : $1,75487\leqslant a<1,75488$.

On en déduit que l'approximation décimale d'ordre 5 par défaut de a est 1,75487.

III.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$ et $S'_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$.

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs arrondies au millième de :
a) S_{50} et S'_{50} ;
b) S_{100} et S'_{100}.

$S_{50}\approx 4,499$

$S'_{50}\approx 1,625$

$S_{100}\approx 5,187$

$S'_{100}\approx 1,635$

2°) Comparer S_n et S'_n pour $n\geqslant 1$ (détailler la démarche ; rédiger de manière concise).

$\forall k\in\{1\,;2\,;\ldots;n\}\quad k\leqslant k^2$

Donc $\forall k\in\{1\,;2\,;\ldots;n\}\quad \frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{k^2}$ (passage à l'inverse dans l'inégalité précédente, les deux membres étant strictement positifs)

On obtient $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ (par addition membre des inégalités précédentes).

On a donc $S_n\geqslant S'_n$.

La méthode par différence est possible mais un peu maladroite, un peu lourde ici.

On pouvait répondre plus précisément de la manière suivante :

1er cas : $n=1\qquad S_1=S'_1=1$

2e cas : $n>1\qquad S_n>S'_n$

IV.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
On note A, B, C, D les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$, $1+2\mathrm{i}$, 1.
À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=z^2+1$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

1°) Soit M un point quelconque de [AB], d'affixe $z=\lambda(1+\mathrm{i})$ où λ est un réel appartenant à l'intervalle $[-1\,;1]$.

Exprimer les coordonnées cartésiennes $(x'\,;y')$ de M' en fonction de λ sans détailler les calculs.

$$x'=1\qquad\text{et}\qquad y'=2\lambda^2$$

2°) En déduire que M' appartient à une droite (à déterminer).

On a $x'=1$ donc $\mathrm{M}'\in(\mathrm{CD})$.

3°) Compléter la phrase :

Lorsque M décrit le segment [AB],

λ décrit l'intervalle **[– 1 ; 1]** ;

$2\lambda^2$ décrit l'intervalle **[0 ; 2]** (le résultat provient du théorème des valeurs intermédiaires).

4°) En déduire l'ensemble E des points M' lorsque M décrit le segment [AB].

L'ensemble *E* des points M' lorsque M décrit le segment [AB] est [CD].

V.

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. On donnera les résultats directement.

Soit a un réel strictement positif. On aurait pu mettre positif ou nul, la formule reste valable.

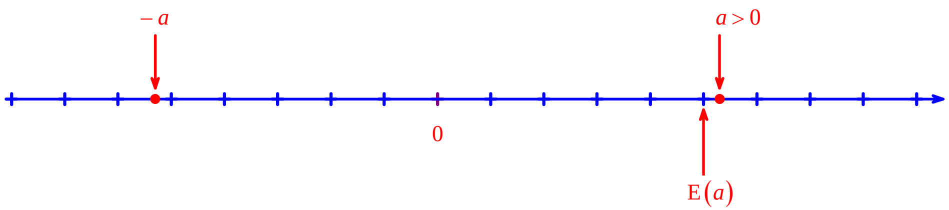
Il s'agit d'un exercice de *dénombrement*.

On peut s'appuyer sur un graphique pour chaque question.

1°) Exprimer en fonction de a le nombre N d'entiers relatifs appartenant à l'intervalle $\left[-a\,;a\right]$ (on rappelle que a est un réel).

$$N = 2\mathrm{E}\left(a\right)+1$$

On trouve ce résultat en raisonnement graphiquement.
On trace la droite réelle en prenant une valeur quelconque pour a.



Les entiers relatifs qui appartiennent à l'intervalle $\left[-a\,;a\right]$ sont tous les entiers relatifs compris entre $-\mathrm{E}\left(a\right)$ et $\mathrm{E}\left(a\right)$ au sens large.

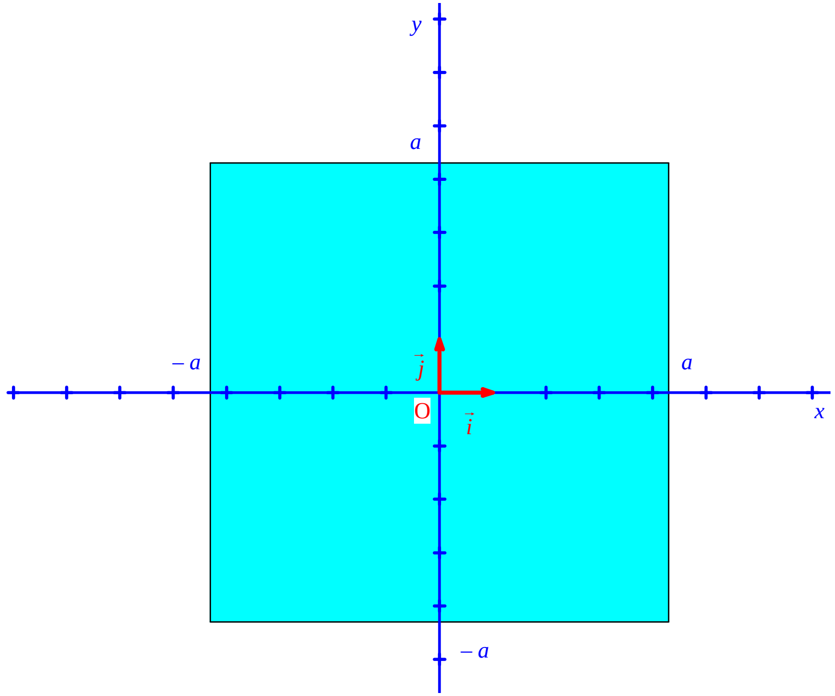
Il y a l'entier 0 qui compte pour 1 puis les entiers autres que 0 qui fonctionnent par paires.

2°) On se place dans le plan P muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note F_a l'ensemble des points $\mathrm{M}\left(x\,;y\right)$ tels que $|\,x\,| \leqslant a$ et $|\,y\,| \leqslant a$.
Exprimer en fonction de a le nombre N' de points de F_a à coordonnées entières (c'est-à-dire dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs).

$$N' = \left(2\mathrm{E}\left(a\right)+1\right)^2$$

On s'appuie sur un graphique.

L'ensemble F_a est un carré de centre O.



On peut représenter en gros les points de l'ensemble F_a.

On applique les techniques de base de dénombrement : arbre de parenté comme en probabilités ou méthode des cases (nombre de possibilités pour x multiplié par le nombre de possibilités pour y).

Question supplémentaire que j'aurais pu ajouter :

Déterminer $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le nombre de points de F_a à coordonnées entières soit égal à 121.

Réponse : $a \in \left[5\,;6\right[$