$1^{\text{ère}}$ S1 **Devoir pour le lundi 4 novembre 2013**

I. On pose $\text{A}=\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$ où x et y sont deux réels.

Le plan est muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble F des points M(x ; y) du plan tels que A existe.

On prendra un centimètre ou un « gros » carreau.

1°) Hachurer sur un même graphique les ensembles E_1 et E_2 définis de la manière suivante :

- E_1 est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $xy > 0$;
- E_2 est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $xy < 0$.

2°)

a) Après avoir observé que l'on peut écrire $\text{A}=\sqrt{\dfrac{y-x}{xy}}$, recopier et compléter :

$$\text{M}(x\,;\,y)\in F \text{ si et seulement si } \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy>0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy<0 \end{cases}.$$

b) Faire un nouveau graphique et hachurer F sur ce graphique.

II. Pour tout entier naturel n, on pose $\text{B}=\dfrac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}}$.

1°) Calculer B à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2°) Calculer B « à la main » en détaillant les étapes.

Version arrangée d'après ce que j'ai vu dans les copies après la correction

I. On pose $\mathrm{A}=\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$ où x et y sont deux réels.

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble F des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan tels que A existe.

On prendra un centimètre ou un « gros » carreau.

1°) Hachurer sur un même graphique les ensembles E_1 et E_2 définis de la manière suivante :

- E_1 est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan tels que $xy > 0$;
- E_2 est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan tels que $xy < 0$.

2°)

a) Après avoir observé que l'on peut écrire $\mathrm{A}=\sqrt{\dfrac{y-x}{xy}}$, recopier et compléter les équivalences suivantes :

$$\mathrm{M}(x\,;y) \in F \text{ si et seulement si } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xy > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xy > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ xy < 0 \end{cases}.$$

On veillera à respecter la mise en page telle qu'elle est donnée dans l'énoncé (tout doit tenir sur une même ligne, pas de coupure en bout de ligne...).

b) Faire un nouveau graphique et hachurer F sur ce graphique.

II. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{B}=\dfrac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}}$.

1°) Calculer B à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2°) Calculer B « à la main » en détaillant les étapes.

Corrigé

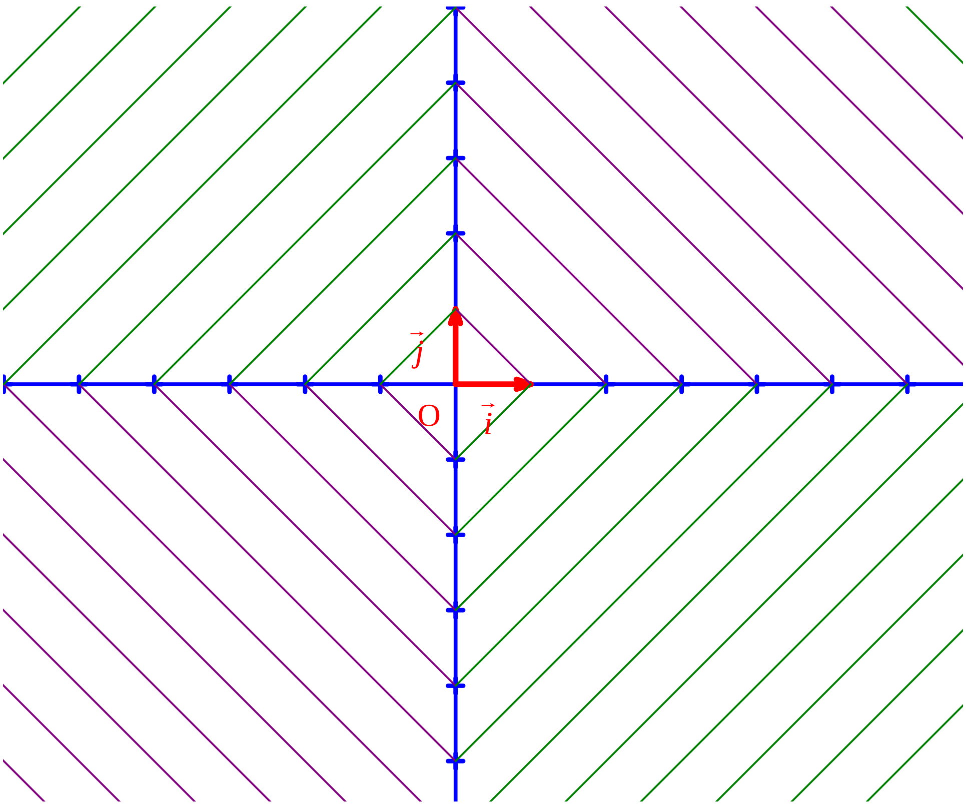
I. On pose $A = \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}$ où x et y sont deux réels.

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble F des points $M(x\,;y)$ du plan tels que A existe.

1°) Hachurer sur un même graphique les ensembles E_1 et E_2 définis de la manière suivante :

- E_1 est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $xy > 0$;
- E_2 est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $xy < 0$.



$M(x\,;y) \in E_1$ si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

$M(x\,;y) \in E_2$ si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

E_1 est hachuré en violet sur le graphique.

E_2 est hachuré en vert sur le graphique.

On précise que les axes (O*x*) et (O*y*) ne sont pas inclus dans les ensembles E_1 et E_2.

Certains élèves ont écrits que les axes (O*x*) et (O*y*) ne « font pas partie » des ensembles E_1 et E_2.
On évite de l'écrire : le mot exact est « inclus » ou « contenus ».

Les hachures ne doivent pas toucher les axes car $xy > 0$.

Si on note Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les quadrants ouverts du plan (numérotées dans l'ordre habituel en tournant dans le sens anti-horaire), on a : $E_1 = Q_1 \cup Q_3$ et $E_2 = Q_2 \cup Q_4$.

On peut dire que E_1 est caractérisé par l'inéquation $xy > 0$ et que E_2 est caractérisé par $xy < 0$.

2°)

a) Après avoir observé que l'on peut écrire $\text{A} = \sqrt{\dfrac{y-x}{xy}}$, recopier et compléter :

$$\text{M}(x\,;y) \in F \text{ si et seulement si } \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ xy < 0 \end{cases}.$$

On a les équivalences suivantes :

M(x ; y) $\in F$ si et seulement si A existe

si et seulement si le radicande existe et est positif ou nul

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} \dfrac{y-x}{xy} \geq 0 \\ xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} y-x \geq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y-x \leq 0 \\ xy < 0 \end{cases}$$

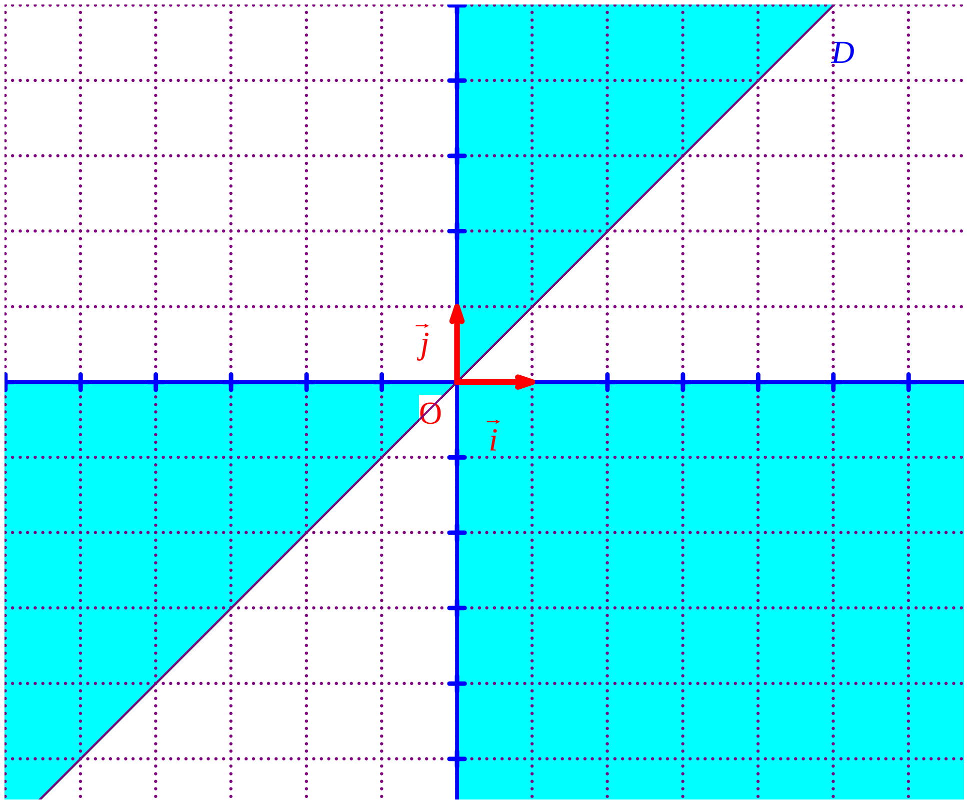
$$\text{si et seulement si } \begin{cases} y \geq x \\ xy > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \leq x \\ xy < 0 \end{cases}$$

Attention aux inégalités strictes ou larges.

Les deux conditions avec un « ou » doivent tenir sur une même ligne.

On n'écrit pas « F existe si set seulement si … ».

b) Faire un nouveau graphique et hachurer F sur ce graphique.



On précise que la droite D est incluse dans F et que les axes (Ox) et (Oy) ne sont pas inclus dans F.

II. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{B}=\dfrac{\left(8^{n+1}+8^{n}\right)^{2}}{\left(4^{n}-4^{n-1}\right)^{3}}$.

1°) Calculer B à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1ère rédaction : En utilisant la commande simplifier sur XCas, on obtient $\mathrm{B}=192$.

2e rédaction : On effectue l'action « simplifier B » sur XCas. On obtient $\mathrm{B}=192$.

On peut remarque deux choses :

a. On remarque que B ne dépend pas de n.

b. On remarque que B est un entier, ce qui n'est pas évident à priori puisque B est défini comme un quotient.

2°) Calculer B « à la main » en détaillant les étapes.

$$\mathrm{B}=\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3}$$

$$=\frac{\left(8^n\times 8+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^n\times 4^{-1}\right)^3}$$

$$=\frac{\left[8^n\left(8+1\right)\right]^2}{\left[4^n\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]^3}$$

$$=\frac{\left(8^n\times 9\right)^2}{\left(4^n\times\frac{3}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{\left(8^n\right)^2\times 9^2}{\left(4^n\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{64^n\times 9^2}{64^n\times\left(\frac{3}{4}\right)^3}$$

$$=9^2\times\left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$=3^4\times\frac{4^3}{3^3}$$

$$=3\times 4^3$$

$$=192$$

Autre méthode maladroite : on développe le numérateur et dénominateur grâce à des identités remarquables. Cette méthode permettait de revoir les identités remarquables, notamment les identités remarquables cubiques ce qui était une bonne chose mais les calculs étaient extrêmement lourds.