1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 4 octobre 2013 (50 min)

Prénom : ………………………………………………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

• Dans les exercices **I** à **V**, le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

• Les exercices **I** et **II** sont des exercices avec rédaction guidée.

I. (1 point)

On donne les vecteurs $\vec{u}\,(-1\ ;\ 4)$ et $\vec{v}\,(-2\ ;\ 1)$.
Calculer le déterminant D de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (écrire les étapes de calcul avant le résultat).

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

II. (2 points)

Soit D_1 et D_2 les droites d'équations cartésiennes respectives $2x - 3y - 1 = 0$ et $-6x + 9y + 7 = 0$.
Donner un vecteur directeur de chacune des droites et démontrer que D_1 et D_2 sont parallèles.

$\overrightarrow{u_1}\,(\ldots\ ;\ \ldots)$ est un vecteur directeur de D_1 ; $\overrightarrow{u_2}\,(\ldots\ ;\ \ldots)$ est un vecteur directeur de D_2.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

III. (9 points)

On donne les points A(– 2 ; 5) et B(– 2 ; – 1) ainsi que le vecteur $\vec{u}\,(4\ ;\ -3)$.
On donne également la droite D d'équation $3x + 5y - 9 = 0$.
On ne demande pas de recopier les questions. On commencera directement la résolution de chaque question.

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur en utilisant la méthode de colinéarité (aucune autre méthode ne sera prise en compte).
On attend une rédaction par chaîne d'équivalence (en commençant par introduire un point M(x ; y) quelconque du plan).
2°) Déterminer l'abscisse du point C en lequel la droite D coupe l'axe des abscisses.
3°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de la droite (AB) avec la droite D.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

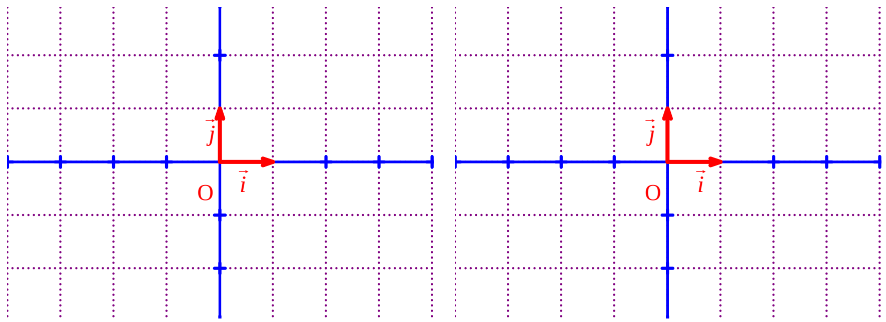
………………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points)

1°) Hachurer sur le graphique ① l'ensemble E des points M(x ; y) tels que $xy \geqslant 0$.

2°) Hachurer sur le graphique ② l'ensemble F des points M(x ; y) tels que $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$.

① ②



3°) Pour tout réel m, on note Δ_m la droite d'équation $x + y = m$.

a) Quel est le coefficient directeur de Δ_m ? ………………… (donner la valeur sans justifier)

b) Formuler sans justifier une condition nécessaire et suffisante sur m pour que Δ_m soit incluse dans F.

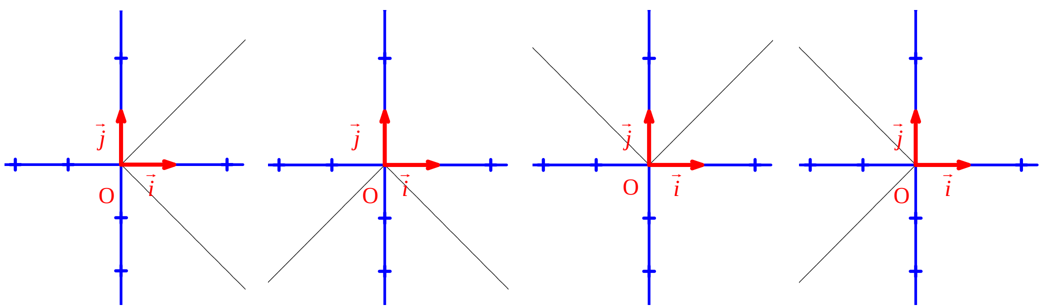
$\Delta_m \subset F$ si et seulement si ……………..

V. (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Parmi les graphiques suivants, lequel donne la représentation graphique de la fonction « valeur absolue » ?

① ② ③ ④



graphique choisi : …………….

2°) Compléter la phrase :

Lorsque x décrit* l'intervalle [– 2 ; 3], $|x|$ décrit l'intervalle ……………… .

* c'est-à-dire prend toutes les valeurs possibles de l'intervalle [– 2 ; 3].

3°) Donner sans explication l'ensemble S des solutions de l'inéquation $-2|x| \leqslant 0$.

S = ...

VI. (1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1 - 2x$ et $g : x \mapsto |x - 3|$.

On a utilisé un tableur pour calculer les images des entiers relatifs x appartenant à l'intervalle [– 3 ; 3].
La feuille de calcul réalisée a été construite sur le modèle ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
2	$f(x)$	7	5	3	1	– 1	– 3	– 5
3	$g(x)$	6	5	4	3	2	1	0

Pour obtenir les valeur de $f(x)$, on a saisi la formule $\boxed{= 1 - 2 * \text{B1}}$ dans la cellule B2 puis on a recopié cette formule vers la droite jusqu'à la cellule H2.

De même, pour obtenir les valeur de $g(x)$, on a saisi une formule dans la cellule B3 puis on a recopié cette formule vers la droite pour compléter la plage de cellules de C3 à H3.

Quelle est cette formule ?

= ……………………………………

Indication :

• Le signe $*$ est le signe de multiplication.

• Sur un tableur, la valeur absolue se note ABS() (on écrit dans les parenthèses le nombre dont on veut obtenir la valeur absolue).

Corrigé du contrôle du 4-10-2013

Une première remarque pour commencer :

Le raisonnement par équivalence est limité pour l'instant :
- aux équations de droites (emploi de « si et seulement si ») ;
- aux équations et inéquations (emploi de l'expression « est successivement ».

En dehors de ces deux cas, le raisonnement par équivalence est mentionné dans le sujet.
En début de 1$^{\text{ère}}$ S, les endroits où il faut utiliser des « si et seulement si » (en dehors des équations de droites) sont mentionnés dans le sujet.

Dans l'énoncé de ce contrôle, il n'interviendra que dans la question 1°) du **III** (équation de droite) et dans la question 3°) b) (condition nécessaire et suffisante à compléter).

I.

$\vec{u}(-1\,;4)$
$\vec{v}(-2\,;1)$

Calculons le déterminant D de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=(-1)\times 1-4\times(-2)=7$$

II.

D_1 : 2x – 3y – 1 = 0

D_2 : – 6x + 9y + 7 = 0

Donnons un vecteur directeur de chacune des droites et démontrons que D_1 et D_2 sont parallèles.

On attend un calcul et une ou deux phrases, c'est tout.
Peut-être aurais-je dû l'écrire explicitement dans le sujet, ce qui aurait évité aux élèves de partir dans des phrases dès le début (notamment des « si et seulement si »).

$\vec{u_1}(3\,;2)$ est un vecteur directeur de D_1 ; $\vec{u_2}(-9\,;-6)$ est un vecteur directeur de D_2.

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix}3 & -9\\ 2 & -6\end{vmatrix}=3\times(-6)-2\times(-9)=0$$

Donc les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires et, par suite, les droites D_1 et D_2 sont parallèles.

III.

A(– 2 ; 5)

B(– 2 ; – 1)

$\vec{u}(4\,;-3)$

$D:\ 3x+5y-9=0$

1°) **Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et admettant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur.**

Pour cette question, on se référait au modèle de rédaction du cours.
On utilisait également le symbole d'appartenance.
On démarre en écrivant : M ∈ Δ (on n'écrit pas en toutes lettres « M appartient à Δ »)
On pouvait utiliser l'abréviation « ssi » pour « si et seulement si » (c'est l'une des rares abréviations autorisées dans la rédaction d'un texte mathématique).

Soit M(x ; y) un point quelconque du plan.

M ∈ Δ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{vmatrix}x+2\\ y-5\end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix}4\\ -3\end{vmatrix}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix}x+2 & 4\\ y-5 & -3\end{vmatrix}=0$

si et seulement si $(x+2)\times(-3)-(y-5)\times 4=0$

si et seulement si $-3x-6-4y+20=0$

si et seulement si $3x+4y-14=00$

Δ a pour équation cartésienne **3x + 4y – 14 = 0**.

On pouvait vérifier le résultat à l'aide d'un programme si l'on en avait rentré un dans la calculatrice pour déterminer une équation cartésienne de droite déterminée par un point et un vecteur directeur.

2°) **Déterminons l'abscisse du point C en lequel la droite D coupe l'axe des abscisses.**

Dans cette question, il fallait noter x_{C} et y_{C} (et non x et y) les coordonnées de C.
On n'utilisait pas de « si et seulement si ».

C ∈ (Ox) donc $y_{\mathrm{C}}=0$.
De plus, C ∈ D donc $3x_{\mathrm{C}}-9=0$ d'où $x_{\mathrm{C}}=3$.

3°) **Déterminons les coordonnées du point d'intersection I de la droite (AB) avec la droite *D*.**

Pour trouver l'idée, on pouvait faire une petite figure au brouillon.

On constate que $x_A = x_B = -2$ donc (AB) a pour équation $x = -2$.

On en déduit que $x_I = -2$.

Or $I \in D$ donc $3x_I + 5y_I - 9 = 0$ d'où $3 \times (-2) + 5y_I - 9 = 0$ soit $5y_I - 15 = 0$

Donc $y_I = 3$.

On en conclut que I a pour coordonnées (– 2 ; 3).

IV.

Les questions de cet exercice n'ont pas été bien réussies (la deuxième d'ailleurs encore moins que la première).
Les élèves ont peut-être été déstabilisés par le caractère inhabituel des questions.
Pour la deuxième, le « ou » a bien la signification de « ou inclusif ».

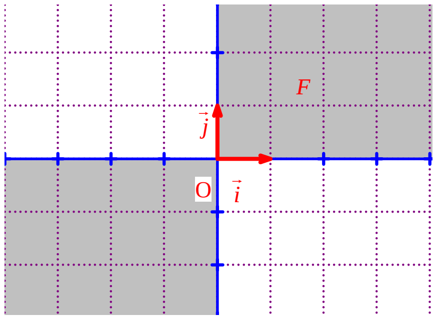
1°) **Hachurons l'ensemble *E* des points M(x ; y) tels que $xy \geqslant 0$.**

La condition $xy \geqslant 0$ peut se traduire de manière équivalente sous l'une des formes suivantes :

- x et y sont de même signe

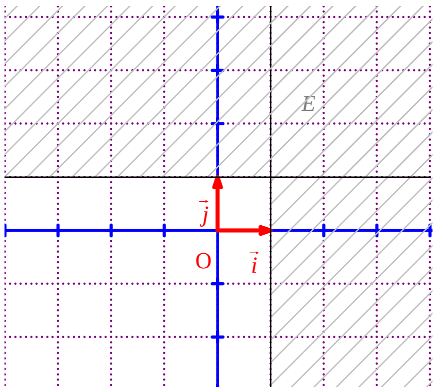
- ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) ou ($x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$)

E est donc la réunion de deux quadrants, frontières comprises (les quadrants I et III, en adoptant la notation traditionnelle des quadrants).



On fait apparaître les frontières (qui sont deux demi-droites fermées).

2°) **Hachurons sur le graphique ② l'ensemble *F* des points M(x ; y) tels que $x \geqslant 1$ ou $y \geqslant 1$.**



L'ensemble *F* est la réunion de deux demi-plans fermés.

3°) $\Delta_m : x + y = m \quad (m \in \mathbb{R})$

a) **Déterminons le coefficient directeur de Δ_m.**

L'équation $x + y = m$ est équivalente à $y = -x + m$.

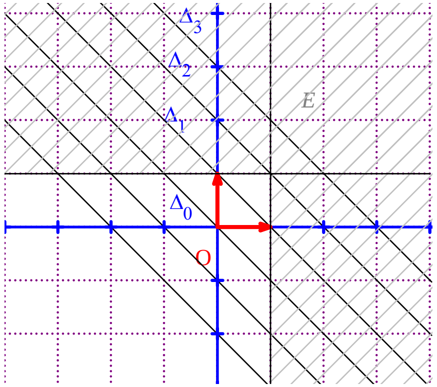
On obtient ainsi l'équation réduite de Δ_m.

Δ_m a pour coefficient directeur **– 1**.

b) **Formulons condition nécessaire et suffisante sur *m* pour que Δ_m soit incluse dans *F*.**

$$\Delta_m \subset F \text{ si et seulement si } \boldsymbol{m \geqslant 2}$$

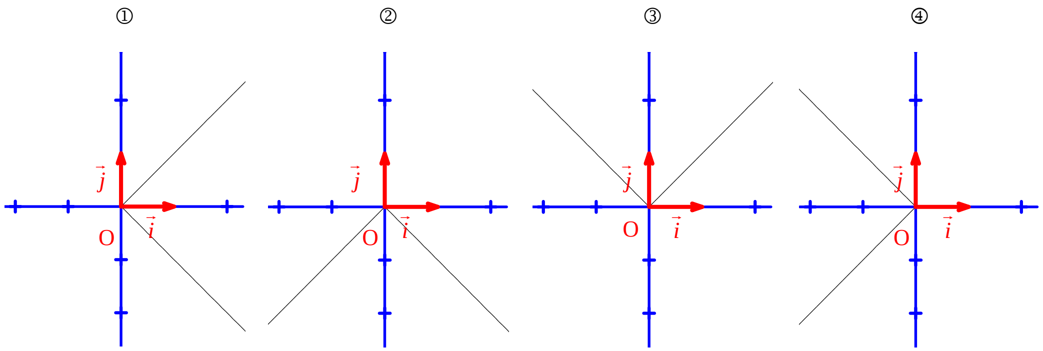
Pour cette question, il fallait avoir une vision dynamique.
On traçait des droites Δ_m sur le graphique.
Elles sont toutes parallèles entre elles puisqu'elles ont toutes le coefficient directeur – 1.
L'ordonnée à l'origine de Δ_m est égale à m.
On faisait varier m de manière à chercher pour quelles valeurs Δ_m est toute entière contenue dans *F*.



Il est intéressant de chercher une démonstration de la conjecture émise.

V.

1°) **Parmi les graphiques suivants, lequel donne la représentation graphique de la fonction « valeur absolue » ?**



graphique choisi : ③

2°) **Complétons la phrase :**

Lorsque x décrit l'intervalle [– 2 ; 3], $|x|$ décrit l'intervalle **[0 ; 3]**.

3°) **Donnons sans explication l'ensemble S des solutions de l'inéquation $-2|x| \leqslant 0$.**

$S = \mathbb{R}$

En effet, l'inéquation $-2|x| \leqslant 0$ est successivement équivalente à :

$\dfrac{-2|x|}{-2} \geqslant \dfrac{0}{-2}$ (on divise les deux membres de l'inéalité par – 2 qui est strictement néatif donc l'inégaglité change de sens)

$|x| \geqslant 0$

Or cette dernière inégalité est toujours vérifiée car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.

VI.

$f : x \mapsto 1 - 2x$

$g : x \mapsto |x - 3|$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
2	$f(x)$	7	5	3	1	– 1	– 3	– 5
3	$g(x)$	6	5	4	3	2	1	0

Pour obtenir les valeur de $g(x)$, on a saisi une formule dans la cellule B3 puis on a recopié cette formule vers la droite pour compléter la plage de cellules de C3 à H3.

Quelle est cette formule ?

= ABS(B1 – 3)