Problème

On pose $s(1)=1$, $s(2)=3+5$, $s(3)=7+9+11$ et ainsi de suite, de sorte que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1°) Calculer $s(2)$, $s(3)$ et $s(4)$.

2°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{k=n} k$.

3°) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{I}(k)$ le k-ième entier naturel impair.

Exprimer $\mathrm{I}(k)$ en fonction de k.

ff

4°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S(n)=\sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{I}(k)$.

5°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T(n)=\sum_{k=1}^{k=n} s(k)$.

6°) En déduire la valeur de $s(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

7°) À l'aide des résultats précédents, déterminer l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en fonction de n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Corrigé

On pose $s(1)=1$, $s(2)=3+5$, $s(3)=7+9+11$ et ainsi de suite, de sorte que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s\,(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1°) **Calculer $s\,(2)$, $s\,(3)$ et $s\,(4)$.**

$s(1)=1$

$s(2)=8$

$s(3)=27$

2°) **Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k$.**

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3°) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{I}(k)$ le k-ième entier naturel impair.

Exprimer $\mathrm{I}(k)$ en fonction de k.

$\mathrm{I}(k)=2k-1$

4°) **Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{I}(k)$.**

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{I}(k) \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{k=n} k - \sum_{k=1}^{k=n} 1 \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

5°) **Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $T(n) = \sum_{k=1}^{k=n} s(k)$**

$$\begin{aligned}T(n) &= \sum_{k=1}^{k=n} s(k)\\ &= \sum_{k=1}^{k=N} \mathrm{I}(k)\\ &= S(N) \text{ avec } N = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

car *s* (1) s'écrit avec 1 nombre impair, *s* (2) avec 2 nombres impairs… *s* (*n*) avec *n* nombres impairs…

Donc $T(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

6°) **En déduire la valeur de *s* (*n*) pour $n \in \mathbb{N}^*$.**

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s(n) &= T(n) - T(n-1)\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2\\ &= n^3\end{aligned}$$

7°) **À l'aide des résultats précédents, déterminer l'expression de $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$ en fonction de *n* ($n \in \mathbb{N}^*$).**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \sum_{k=1}^{k=n} s(k) = T(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$