TS1

Contrôle du samedi 5-10-2013 (2 heures)

• La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

• Il est demandé d'encadrer en rouge tous les résultats à la règle.

I. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_3.

2°) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui demande en entrée un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui affiche en sortie la valeur de u_n. Il n'est pas demandé de programmer cet algorithme sur la calculatrice.
On s'arrangera pour que l'algorithme tienne sur une même page.

> **Entrée :**
> Saisir n
>
> **Initialisation :**
> u prend la valeur ….
>
> **Traitement :**
> **Pour** k allant de 0 à $n-1$ **Faire**
>
> u prend la valeur ……………………..
>
> **FinPour**
>
> **Sortie :**
> Afficher u

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{1}{2^n} - n$.

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de n (expression simplifiée).

II. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les deux premiers termes sont $u_0 = -1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ et qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 2^n u_n$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.
b) En déduire que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est constante puis que la suite (v_n) est arithmétique.
c) Établir à l'aide de la question précédente que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

III. (5 points)

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ défini pour $z \in \mathbb{C}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

1°) Déterminer a, b, c sachant que l'on a : $P(0) = -5\mathrm{i}$, $P(\mathrm{i}) = 0$ et $P(1) = 2 - 2\mathrm{i}$.

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - \mathrm{i})(z^2 - 4z + 5)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - \mathrm{i})z^2 = (z - \mathrm{i})(4z - 5)$ (E).

IV. (5 points)

Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $1+\mathrm{i}$ et C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

À tout point M de *P* d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

1°) Déterminer les nombres complexes z tels que les points M et M' soient symétriques par rapport au point O.

2°) Soit M un point quelconque de (OB), d'affixe $z = \lambda(1+\mathrm{i})$ où λ est un réel.

a) Calculer z' en fonction de λ (résultat sous forme algébrique).

b) Démontrer que si le point M appartient à la droite (OB), alors le point M' associé appartient à la demi-droite [AB).

3°) Démontrer en adaptant le raisonnement de la question précédente que si M appartient à la droite (OC), alors M' appartient à une demi-droite que l'on définira.

4°) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit l'axe des imaginaires purs ?

Il est demandé de ne pas remettre l'énoncé mais de le conserver.

Corrigé du contrôle du 5-10-2013

Beaucoup d'élèves ont commis des erreurs de notations : oubli des parenthèses autour de la suite.

I.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - n) - 1 \end{cases}$$

1°) **Calculons u_3.**

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_0 - 0) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 - 1) - 1 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_2 - 2) - 1 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{15}{4}\right) - 1 = -\frac{23}{8}$$

On peut calculer les termes de la suite avec la calculatrice et vérifier ainsi les résultats obtenus précédemment.

Sur calculatrice TI, on doit d'abord modifier la relation de récurrence.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{2}\big(u_{n-1} - (n-1)\big) - 1 \end{cases}$$

On rentre $u(n) = 0.5\big(u(n-1) - (n-1)\big) - 1$.

On obtient le tableau de valeurs ci-dessous :

n	$u(n)$
0	1
1	– 0,5
2	– 1,75
3	– 2,875

On vérifie ainsi la valeur de u_3 calculée précédemment.

2°) **Complétons l'algorithme suivant qui demande en entrée un entier naturel $n \geqslant 1$ et qui affiche en sortie la valeur de u_n.**

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour k allant de 0 à $n-1$ **Faire**
  u prend la valeur $\frac{1}{2}(u-k)-1$
FinPour

Sortie :
Afficher u

3°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + n$

a) **Démontrons que la suite (v_n) est géométrique.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1)$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - n) \cancel{-1} + n \cancel{+1}$$
$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2}$$
$$= \frac{v_n}{2}$$

b) **Déduisons-en que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{2^n} - n$.**

On a : $v_0 = u_0 + 0 = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \dfrac{1}{2^n}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1}{2^n} - n$.

4°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$

Exprimons S_n en fonction de n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2^k} - k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k}\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=n} k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{k=n} k\right)$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \frac{n(n+1)}{2}$$

On applique les formules sommatoires classiques :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$0+1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

II.

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$$

La suite (u_n) est une suite définie par ses deux premiers termes et une *relation de récurrence d'ordre 2* (chaque terme, sauf les deux premiers, est défini en fonction des deux précédents).

On peut rentrer la suite sur calculatrice TI.

Pour cela, on doit commencer par transformer la relation de récurrence : $u_n = u_{n-1} + 0,25u_{n-2}$ (pour $n \geqslant 2$).

Du coup, on rentrera :

- 0 pour valeur minimale de n ;
- la relation de récurrence $u(n) = u(n-1) + 0,25 * u(n-2)$;
- $\mathrm{u}(n\mathrm{Min}) = \{0.5, -1\}$.

Attention, on tape d'abord la valeur de u_1 puis la valeur de u_0.
Les deux valeurs sont écrites entre parenthèses, séparées par une virgule, l'ordre décroissant des indices.

On peut alors observer avec le tableau de valeurs que la suite est croissante de « 0 à 1 », décroissante de « 1 à 2 » et qu'elle semble croissante à partir de l'indice 2. Elle n'est pas monotone.

1°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n u_n$

a) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} &= 2^{n+2} u_{n+2} \\ &= 2^{n+2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) \\ &= 2^{n+2}u_{n+1} - 2^n u_n \\ &= 2v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

b) **En déduire que la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est constante puis que la suite (v_n) est arithmétique.**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} - v_{n+1} &= 2v_{n+1} - v_n - v_{n+1} \\ &= v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_{n+1} - v_n)$ est constante.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = v_1 - v_0 = 2^1 u_1 - 2^0 u_0 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 \times (-1) = 2$.

Par conséquent, comme la différence entre deux termes consécutifs est égale à 2, la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

c) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.**

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= v_0 + nr \\ &= -1 + 2n \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n \times u_n$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{v_n}{2^n}$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
D'une part,

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{k=0}^{k=0} u_k \\ &= u_0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - 3 = -1$$

Donc on peut écrire $S_0 = 2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0}$

On en déduit que $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = 2 - \frac{2(k+1)+3}{2^{k+1}}$ soit $S_{k+1} = 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}}$.

On a :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \sum_{p=0}^{p=k+1} u_p \\ &= \left(\sum_{p=0}^{p=k} u_p \right) + u_{k+1} \\ &= S_k + u_{k+1} \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence, $S_k = 2 - \frac{2k+3}{2^k}$.

Donc :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 2 - \frac{2k+3}{2^k} + \frac{2(k+1)-1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{4k+6}{2^{k+1}} + \frac{2k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 + \frac{2k+1-4k-6}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2k-5}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2k+5}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

III.

$P(z)=z^3+az^2+bz+c$ ($z\in\mathbb{C}$) avec a, b, c trois nombres complexes

1°) **Déterminons a, b, c sachant que l'on a : $P(0)=-5\text{i}$ (1), $P(\text{i})=0$ (2) et $P(1)=2-2\text{i}$ (3).**

(1) donne $0^3+a\times0^2+b\times0+c=-5\text{i}$ donc $c=-5\text{i}$ (1').

(2) donne $\text{i}^3+a\times\text{i}^2+b\times\text{i}+c=0$ (2').

Compte tenu de (1'), (2') donne $-\text{i}-a+\text{i}b-5\text{i}=0$ soit $-a+\text{i}b=6\text{i}$ (2'').

(3) donne $1+a+b+c=2-2\text{i}$ (3').
Compte tenu de (1'), (3') donne $a+b=1+3\text{i}$ (3'').

On résout le système formé par les équations (2'') et (3'') : $\begin{cases}-a+\text{i}b=6\text{i}\\ a+b=1+3\text{i}\end{cases}$.

Par addition membre à membre, on obtient : $(1+\text{i})b=1+9\text{i}$ (4).

$$(4)\Leftrightarrow b=\frac{1+9\text{i}}{1+\text{i}}$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{(1+9\text{i})(1-\text{i})}{2}$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{10+8\text{i}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b=5+4\text{i}$$

On remplace b par $5+4\text{i}$ dans l'égalité (3'').

On obtient $a+5+4\text{i}=1+3\text{i}$ (5).

(5) $\Leftrightarrow a=-4-\text{i}$

Conclusion :

$a=-4-\text{i}$; $b=5+4\text{i}$; $c=-5\text{i}$

On a donc $P(z)=z^3+(-4-\text{i})z^2+(5+4\text{i})z-5\text{i}$.

2°) **Démontrons que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-\text{i})(z^2-4z+5)$.**

1ère méthode :

$$\begin{aligned}(z-\text{i})(z^2-4z+5)&=z^3-4z^2+5z-\text{i}z^2+4\text{i}z-5\text{i}\\&=z^3+(-4-\text{i})z^2+(5+4\text{i})z-5\text{i}\\&=P(z)\end{aligned}$$

2e méthode :

$$\begin{aligned}P(z)&=z^3-4z^2-\text{i}z^2+5z+4\text{i}z-5\text{i}\\&=z^3-4z^2+5z-\text{i}(z^2-4z+5)\\&=z(z^2-4z+5)-\text{i}(z^2-4z+5)\\&=(z-\text{i})(z^2-4z+5)\end{aligned}$$

3°) **Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-\text{i})z^2=(z-\text{i})(4z-5)$ (E).**

$$\begin{aligned}(\text{E})&\Leftrightarrow(z-\text{i})z^2-(z-\text{i})(4z-5)=0\\&\Leftrightarrow(z-\text{i})(z^2-4z+5)=0\\&\Leftrightarrow z-\text{i}=0\text{ ou }z^2-4z+5=0\\&\Leftrightarrow z=\text{i}\text{ ou }z^2-4z+5=0\end{aligned}$$

Considérons le polynôme z^2-4z+5.

Recensement des coefficients :

$a=1$; $b=-4$; $c=5$
$b'=-2$

Calcul du discriminant réduit :
$\Delta'=b'^2-ac$
$=-1$

On a : $\Delta'<0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b'-\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$ $\qquad$ $z_2=\dfrac{-b'+\text{i}\sqrt{-\Delta'}}{a}$

$z_1=2-\text{i}$ $\qquad$ $z_2=2+\text{i}$

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{\text{i}\,;2+\text{i}\,;2-\text{i}\}$.

IV.

$A(1)$ $B(1+i)$ $C(1-i)$

À tout point M de P d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

1°) **Déterminons les nombres complexes z tels que les points M et M' soient symétriques par rapport au point O.**

M et M' sont symétriques par rapport à O $\Leftrightarrow$ O est le milieu de $[MM']$

$$\Leftrightarrow \frac{z+z'}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow z + z' = 0$$
$$\Leftrightarrow z + 1 + z^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

Considérons le polynôme $z^2 + z + 1$.

Le discriminant est égal à $\Delta = -3$.
$\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Les nombres complexes z tels que les points M et M' soient symétriques par rapport au point O sont donc $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

2°) M : point quelconque de (OB), d'affixe $z = \lambda(1+i)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

a) **Calculons z' en fonction de λ.**

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \left[\lambda(1+i)\right]^2 \\ &= 1 + \lambda^2 (1+i)^2 \\ &= 1 + 2i\lambda^2 \end{aligned}$$

b) **Démontrons que si $M \in (OB)$, alors le point $M' \in [AB]$.**

Le point M' a pour coordonnées $(1\,;\,2\lambda^2)$.
On a donc : $x_{M'} = 1$ et $y_{M'} \geqslant 0$ d'où $M' \in [AB]$.

3°) **Démontrons que si $M \in (OC)$, alors M' appartient à une demi-droite.**

Soit M un point quelconque de (OC), d'affixe $z = \lambda(1-i)$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \left[\lambda(1-i)\right]^2 \\ &= 1 + \lambda^2 (1-i)^2 \\ &= 1 - 2i\lambda^2 \end{aligned}$$

Le point M' a pour coordonnées $(1\,;\,-2\lambda^2)$.
On a donc : $x_{M'} = 1$ et $y_{M'} \leqslant 0$ d'où $M' \in [AC]$.

4°) **Déterminons l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit l'axe des imaginaires purs.**

Soit M un point quelconque de l'axe des imaginaires purs, d'affixe $z = \lambda i$ où λ est un réel.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + (\lambda i)^2 \\ &= 1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

Lorsque M décrit l'axe des imaginaires purs, λ décrit $\mathbb{R}$ et $1-\lambda^2$ décrit l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
Donc M' décrit la demi-droite [AO).