TS1

Contrôle du jeudi 3 octobre 2013
(60 minutes)

Prénom : ……………………………………….……… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (10 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 4 \times 3^n + 1$.

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$. Exprimer S_n en fonction de *n* (expression simplifiée).

II. (2 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1°) Calculer $S_{p+1} - S_p$ en fonction de p ($p \geqslant 1$). $S_{p+1} - S_p =$ ....

2°) Calculer S_{50} à l'aide de la calculatrice (valeur arrondie au centième). $S_{50} \approx$ ....

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}(u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

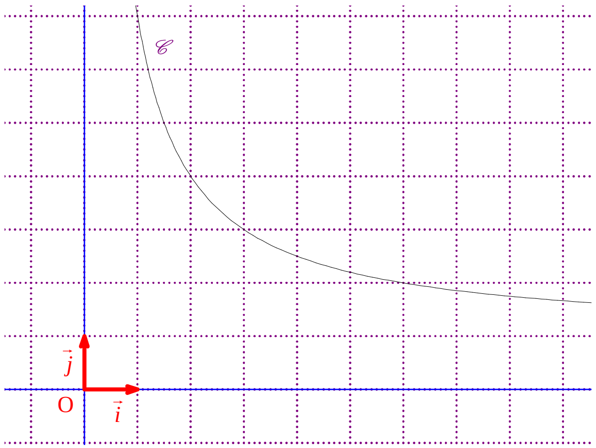
À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies au centième de :

u_{10} $u_{10} \approx$ ....

$S = \sum_{k=0}^{k=20} u_k$ $S \approx$ ....

IV. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{6}{u_n}$ pour tout entier naturel n. On donne ci-dessous une partie de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = 1 + \frac{6}{x}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1°) Effectuer la construction des termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 (en faisant apparaître les traits de construction en pointillés).

2°) Compléter les phrases suivantes concernant le sens de variation :

D'après le graphique, il semble que la suite (u_{2n}) est ....

et que la suite (u_{2n+1}) est ....

V. (1 point)

Pour tout entier naturel n, on pose $\text{A}_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$ et $\text{B}_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

En observant les valeurs A_n et de B_n pour les premières valeurs de n, conjecturer l'expression de A_n en fonction de n.

$\text{A}_n =$ ....

Bonus (à traiter à la fin, s'il reste du temps) :

Établir la formule conjecturée en utilisant un raisonnement par récurrence.

VI. (2 points)

Calculer le nombre complexe $Z = \sum_{k=0}^{k=2013} \text{i}^k$ en donnant le résultat sous forme algébrique.

....

....

....

....

VII. (1 point)

On considère la propriété suivante pour tout couple $(z\,;z')$ de nombres complexes :

« Si z et z' sont réels, alors $z + z'$ et zz' sont réels. »

La réciproque est-elle vraie ? Justifier brièvement.

....

....

Corrigé du contrôle du 3-10-2013

I.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

1°) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = 4\times 3^n + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 4\times 3^n + 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 5$ par définition de la suite.
On a $4\times 3^0 + 1 = 4 + 1 = 5$
Donc $u_0 = 4\times 3^0 + 1$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = 4\times 3^k + 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 4\times 3^{k+1} + 1$.

On a : $u_{k+1} = 3u_k - 2$ par définition de la suite (u_n).

Or par hypothèse de récurrence, $u_k = 4\times 3^k + 1$.

Donc on a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3\left(4\times 3^k + 1\right) - 2 \\ &= 4\times 3^{k+1} + 3 - 2 \\ &= 4\times 3^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Par conséquent, pour tout entier naturel *n*, $u_n = 4\times 3^n + 1$.

Retour sur la partie « hérédité » :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3\left(4\times 3^k + 1\right) - 2 \\ &= 3\times 4\times 3^k + 3 - 2 \\ &= (3\times 4)\times 3^k + 3 - 2 \\ &= 12\times 3^k + 1 \quad \text{juste mais pas intéressant} \\ &= 4\times\left(3\times 3^k\right) + 1 \\ &= 4\times 3^{k+1} + 1 \quad \text{intéressant par rapport à ce à quoi on veut aboutir} \end{aligned}$$

2°) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$

Exprimons S_n en fonction de *n* (expression simplifiée).

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n}\left(4\times 3^k + 1\right)$$

1ère méthode :

On écrit la somme en extension.

$$\begin{aligned} S_n &= \left(4\times 3^0 + 1\right) + \left(4\times 3^1 + 1\right) + \left(4\times 3^2 + 1\right) + \ldots + \left(4\times 3^n + 1\right) \\ &= 4\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n\right) + (1 + 1 + \ldots + 1) \\ &= 4\times\frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} + (n+1) \quad \text{(on applique la formule de sommation des puissances successives d'un réel*)} \\ &= 2\times\left(3^{n+1} - 1\right) + (n+1) \\ &= 2\times 3^{n+1} + n - 1 \end{aligned}$$

* Il n'y a pas besoin d'introduire une suite géométrique.

Il fallait bien observer que $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$ car il y a $n + 1$ termes, la somme allant de 0 à *n*.
Beaucoup d'élèves se sont trompés et ont mis *n* à la place de $n + 1$.

2^e méthode :

On utilise les propriétés des sommes.

$$S_n=\left(\sum_{k=0}^{k=n}4\times 3^k\right)+(n+1)$$
$$=4\left(\sum_{k=0}^{k=n}3^k\right)+(n+1)$$
$$=4\times\frac{3^{n+1}-1}{3-1}+(n+1)$$
$$=2\times\left(3^{n+1}-1\right)+(n+1)$$
$$=2\times 3^{n+1}+n-1$$

II.

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}\quad (n\geqslant 1)$$

1°) **Calculons $S_{p+1}-S_p$ en fonction de p ($p\geqslant 1$).**

$$S_{p+1}-S_p=\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

2°) **Calculons S_{50} à l'aide de la calculatrice (valeur arrondie au centième).**

$S_{50}\approx$ **12,75**

L'affichage de la calculatrice est : 12,75237394.

III.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=u_n-\dfrac{1}{2}(u_n)^2\end{cases}$$

u_{10}

$u_{10}\approx 0{,}14$

Affichage de la calculatrice : 0,1349017978

$$S=\sum_{k=0}^{k=20}u_k$$

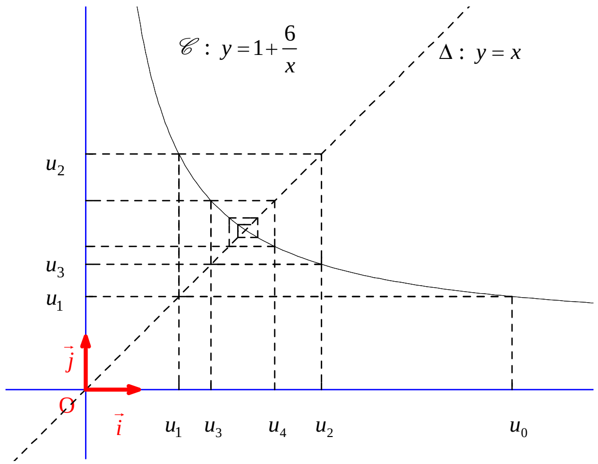
$S\approx 4{,}51$

Affichage de la calculatrice : 4,506163489

IV.

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0=8 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=1+\dfrac{6}{u_n}\end{cases}$$

1°) **Effectuons la construction de u_0, u_1 …, u_4.**



On note u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur l'axe des abscisses.

On fait apparaître une « spirale » (représentation en escargot).

On peut vérifier le tracé sur la calculatrice.

2°) **Complétons les phrases suivantes concernant le sens de variation :**

D'après le graphique, il semble que la suite (u_{2n}) est strictement décroissante et que la suite (u_{2n+1}) est strictement croissante.

Remarques :

• Il devient difficile de construire sur le graphique les termes de la suite à partir de l'indice 4.
La suite ne devient pas constante pour autant.

• La suite (u_n) n'est pas monotone.

Complément :

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$.

Ces deux suites sont définies sur $\mathbb{N}$ (donc chacune à partir de l'indice 0).

(v_n)	(w_n)
$v_0 = u_0$	$w_0 = u_1$
$v_1 = u_2$	$w_1 = u_3$
$v_2 = u_4$	$w_2 = u_5$
$v_3 = u_6$	$w_3 = u_7$

La suite (v_n) est la sous-suite des termes d'indices pairs.

La suite (w_n) est la sous-suite des termes d'indices impairs.

V.

$$\mathbf{A}_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$$

$$\mathbf{B}_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Conjecturons l'expression de A_n en fonction de *n*.

On calcule A_n et B_n pour les premières valeurs de *n* :
- soit « à la main »
- soit en s'aidant de la calculatrice : on pouvait directement rentrer la suite (A_n) dans la calculatrice en tapant sur la ligne $u(n) =$ la séquence : $\boxed{\text{somme(suite(}(-1)^{\mathrm{K}} * \mathrm{K}^2, \mathrm{K}, 0, n)}$; on rentrait également la suite (B_n) et l'on obtenait un tableau de valeurs avec les deux suites.

A_n	B_n
$\mathrm{A}_0 = 0$	$\mathrm{B}_0 = 0$
$\mathrm{A}_1 = -1$	$\mathrm{B}_1 = 1$
$\mathrm{A}_2 = 3$	$\mathrm{B}_2 = 3$
$\mathrm{A}_3 = 6$	$\mathrm{B}_3 = -6$

On pouvait alors comparer directement les termes de deux suites.

On pouvait aussi représenter les deux suites sous forme d'un nuage de points.

On observe pour les premières valeurs de *n* que :

- si *n* est pair A_n et B_n sont égaux ;

- si *n* est impair A_n et B_n sont opposés.

On peut donc conjecturer que $\mathrm{A}_n = (-1)^n \mathrm{B}_n$ pour tout entier naturel *n* soit :

$$\mathbf{A}_n = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

On peut établir que cette formule est vraie pour tout entier naturel *n* par récurrence.

Bonus (à traiter à la fin, s'il reste du temps) :

Établir la formule conjecturée en utilisant un raisonnement par récurrence.

Démontrons par récurrence, que pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{A}_n = (-1)^n \times \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $\mathrm{A}_n = (-1)^n \times \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

On a : $\mathrm{A}_0 = (-1)^0 \times 0^2 = 1 \times 0 = 0$. Or $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} \times (-1)^0 = 0$.

On peut donc écrire : $\mathrm{A}_0 = \dfrac{0 \times (0+1)}{2} \times (-1)^0$.

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\mathrm{A}_k = \dfrac{k(k+1)}{2} \times (-1)^k$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $\mathrm{A}_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} \times (-1)^{k+1}$.

On part de l'égalité $\mathrm{A}_{k+1} = \mathrm{A}_k + (-1)^{k+1} \times (k+1)^2$.
Cette égalité, grâce à l'hypothèse de récurrence, permet d'écrire la suite de calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{k+1} &= \frac{k(k+1)}{2} \times (-1)^k + (-1)^{k+1} \times (k+1)^2 \\
&= (-1)^k \times (k+1)\left(\frac{k}{2} - (k+1)\right) \\
&= (-1)^k \times (k+1)\left(\frac{-k-2}{2}\right) \\
&= (-1)^k \times (k+1)\left(-\frac{k+2}{2}\right) \\
&= (-1)^k \times (k+1) \times (-1) \times \frac{k+2}{2} \\
&= (-1)^{k+1} \times \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

VI.

Calculons le nombre complexe $Z=\sum_{k=0}^{k=2013} \mathrm{i}^k$.

1ère méthode :

On applique la formule de la somme des puissances consécutives d'un nombre différent de 1.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1-\mathrm{i}^{2014}}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{1-(-1)}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{2}{1-\mathrm{i}} \\ &= \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} \\ &= 1+\mathrm{i} \end{aligned}$$

On a une cyclicité d'ordre 4 des puissances de i.

2e méthode :

$2013=503\times 4+1$

On regroupe les termes par paquets de 4.

$$\begin{aligned} Z &= 503\times\mathrm{i}+503\times(-\mathrm{i})+503\times 1+503\times(-1)+\mathrm{i}+1 \\ &= \mathrm{i}+1 \end{aligned}$$

Il n'était pas possible de vérifier ce résultat avec une calculatrice « normale » (dépassement de capacités).

VII.

• Énoncé direct :

$$\forall (z\,;z') \in \mathbb{C}^2 \quad (z \text{ et } z' \text{ sont réels}) \Rightarrow (z+z' \text{ et } zz' \text{ sont réels})$$

Si deux complexes sont réels, alors la somme et le produit sont réels.

• Énoncé réciproque :

$$\forall (z\,;z') \in \mathbb{C}^2 \quad (z+z' \text{ et } zz' \text{ sont réels}) \Rightarrow (z \text{ et } z' \text{ sont réels})$$

L'énoncé direct est vrai de manière évidente.

L'énoncé réciproque est **faux** comme le montre le contre-exemple suivant.

On prend $z=\mathrm{i}$ et $z'=-\mathrm{i}$.
On a : $z+z'=0$ et $zz'=1$.
$z+z'$ et zz' sont réels mais z et z' ne sont pas réels.

Plusieurs élèves n'ont pas bien vu qu'il fallait donner le contre-exemple pour la somme et le produit.
Pour cela, il faut de référer à la négation de la réciproque :

$$\exists (z\,;z') \in \mathbb{C}^2 \quad (z+z' \text{ et } zz' \text{ sont réels}) \text{ et } (z \text{ ou } z' \text{ non réel}).$$

Il faut se référer au cours de logique formelle.