Chap. 6 Composition des fonctions (1)

I. Exemple introductif
(notion de composée)

1°) Hypothèses

$f : x \mapsto x+4$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$g : x \mapsto x^2$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

On considère le programme de calcul.

① Choisir un nombre
② Calculer son image par f
③ Calculer l'image du nombre obtenu par g

2°) Avec des valeurs numériques

① On prend le nombre 3
② $f(3) = 7$
③ $g(7) = 49$

$g\left[f(3)\right] = 49$

3°) En calcul littéral

① On prend un réel x quelconque
② $f(x) = \underbrace{x+4}_{X}$
③ $g(X) = X^2$

$\qquad = (x+4)^2$

$$x \overset{f}{\mapsto} \underbrace{x+4}_{X}$$

$$X \overset{g}{\mapsto} X^2 = (x+4)^2$$

composée de *f* suivie de *g*

II. Composée de deux fonctions

1°) Définition

f et g sont deux fonctions.
On appelle **« composée de *f* suivie de *g* »** la fonction notée $g \circ f$ (« g rond f ») définie par $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$.

(image de $f(x)$ par g)

N.B. : Les crochets remplacent les parenthèses de fonctions.

2°) Exemple de calcul

$f : x \mapsto x-1$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$g : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$

Calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$.

Présentation des calculs.

$(g \circ f)(x) = g(X)$ avec $X = f(x)$

$\qquad = X^2 + 3X - 4$

$\qquad = (x-1)^2 + 3(x-1) - 4$

$\qquad = x^2 - 5x - 6$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(X) \text{ avec } X = g(x)\\
&= X - 1\\
&= x^2 + 3x - 4 - 1\\
&= x^2 + 3x - 5
\end{aligned}
$$

3°) Remarque

En général, $g \circ f \neq f \circ g$.

On dit que la loi de composition des fonctions n'est pas commutative.

III. Ensemble de définition d'une composée

1°) Propriété

$(g \circ f)(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$ 2 conditions

2°) Pas d'exemple

Cette notion sera retravaillée dans le chapitre « Composée et sens de variation ».

3°) Remarque

Lorsque *f* et *g* sont définies sur $\mathbb{R}$, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont aussi définies sur $\mathbb{R}$.

1$^{\text{ère}}$ S Exercices sur le chapitre 6

1 Dans chaque cas on donne les expressions de deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$.
On demande de calculer $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$ pour *x* réel quelconque en présentant soigneusement les calculs.

1°) $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = 2x + 1$.

2°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

3°) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 2$ et $g(x) = 2x$.

2 Dans chaque cas on donne l'expression d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$.
On demande de calculer $(f \circ f)(x)$ pour *x* réel quelconque.

1°) $f(x) = 2x - 3$

2°) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

3 On considère les fonctions *f* et *g* définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = 3x$.
Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles égales ?

Réponses

1 Il s'agit de faire un calcul littéral et non de faire un calcul pour un exemple numérique.
Pour les calculs, utiliser un *X* intermédiaire.

1°) $(g \circ f)(x) = 6x - 1$; $(f \circ g)(x) = 6x+2$.

2°) $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$; $(f \circ g)(x) = (2x-1)^2$ (il n'est pas utile de développer le résultat)

3°) $(g \circ f)(x) = 6x^3 - 2x^2 + 10x + 4$; $(f \circ g)(x) = 24x^3 - 4x^2 + 10x + 2$

Dans ce cas, on préfère développer les deux expressions.

Il faut noter que toutes égalités sont quantifiées implicitement ($\forall x \in \mathbb{R}$ ….).

$\boxed{2}$ 1°) $(f \circ f)(x) = 4x - 9$ 2°) $(f \circ f)(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 1$

Pour ce calcul, on doit calculer $\left(x^2 - 3x + 1\right)^2$.

Pour cela on utilise la formule d'identité remarquable pour $(a+b+c)^2$.

$$\left(x^2 - 3x + 1\right)^2 = \underbrace{\left(x^2\right)^2 + (-3x)^2 + 1^2}_{\text{trois termes carrés}} + \underbrace{2 \times x^2 \times (-3x) + 2 \times (-3x) \times 1 + 2 \times 1 \times x^2}_{\text{3 termes rectangles}}$$

Encore une fois, la quantification est implicite ou sous-jacente.

$\boxed{3}$ Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont égales (il faut faire un calcul pour le démontrer).

$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = \ldots$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = \ldots$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

Dans cet exercice, il est vraiment figurer la quantification explicitement avant chaque égalité (cf. définition de deux fonctions égales).

COMMENTAIRES D'ELEVES

Expression de f

Expression de g

Expression de $g \circ f$

Attention : une expression de fonction c'est toujours avec des x :

$(g \circ f)(x)$

Reparler de la **notion de variable**.

Ce chapitre permet de retravailler la **notion de variable**.

$\begin{cases} x \in \\ f(x) \in \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) \in \mathcal{D}_g \end{cases}$ **2 conditions**