

# Chap. 6

# Composition des fonctions (1)

## I. Exemple introductif (notion de composée)

### 1°) Hypothèses

$$f : x \mapsto x + 4 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto x^2 \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$$

On considère le programme de calcul.

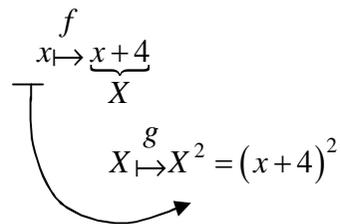
- ① Choisir un nombre
- ② Calculer son image par  $f$
- ③ Calculer l'image du nombre obtenu par  $g$

### 2°) Avec des valeurs numériques

- ① On prend le nombre 3
- ②  $f(3) = 7$
- ③  $g(7) = 49$   
 $g[f(3)] = 49$

### 3°) En calcul littéral

- ① On prend un réel  $x$  quelconque
- ②  $f(x) = \underbrace{x+4}_X$
- ③  $g(X) = X^2$   
 $= (x+4)^2$



composée de  $f$  suivie de  $g$

## II. Composée de deux fonctions

### 1°) Définition

$f$  et  $g$  sont deux fonctions.

On appelle « **composée de  $f$  suivie de  $g$**  » la fonction notée  $g \circ f$  («  $g$  rond  $f$  ») définie par  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ .

↑  
(image de  $f(x)$  par  $g$ )

**N.B. :** Les crochets remplacent les parenthèses de fonctions.

### 2°) Exemple de calcul

$$f : x \mapsto x - 1 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto x^2 + 3x - 4 \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$$

Calculer  $(g \circ f)(x)$  et  $(f \circ g)(x)$ .

Présentation des calculs.

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(X) \text{ avec } X = f(x) \\
 &= X^2 + 3X - 4 \\
 &= (x-1)^2 + 3(x-1) - 4 \\
 &= x^2 - 5x - 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(X) \text{ avec } X = g(x) \\
 &= X - 1 \\
 &= x^2 + 3x - 4 - 1 \\
 &= x^2 + 3x - 5
 \end{aligned}$$

### 3°) Remarque

**En général,  $g \circ f \neq f \circ g$ .**

**On dit que la loi de composition des fonctions n'est pas commutative.**

### III. Ensemble de définition d'une composée

#### 1°) Propriété

$(g \circ f)(x)$  existe si et seulement si  $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$  2 conditions

#### 2°) Pas d'exemple

Cette notion sera retravaillée dans le chapitre « Composée et sens de variation ».

#### 3°) Remarque

Lorsque  $f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont aussi définies sur  $\mathbb{R}$ .

## 1<sup>ère</sup> S

## Exercices sur le chapitre 6

**1** Dans chaque cas on donne les expressions de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ .

On demande de calculer  $(g \circ f)(x)$  et  $(f \circ g)(x)$  pour  $x$  réel quelconque en présentant soigneusement les calculs.

1°)  $f(x) = 3x - 1$  et  $g(x) = 2x + 1$ .

2°)  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = 2x - 1$ .

3°)  $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 2$  et  $g(x) = 2x$ .

**2** Dans chaque cas on donne l'expression d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

On demande de calculer  $(f \circ f)(x)$  pour  $x$  réel quelconque.

1°)  $f(x) = 2x - 3$

2°)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

**3** On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = 2x$  et  $g(x) = 3x$ .

Les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont-elles égales ?

## Réponses

**1** Il s'agit de faire un calcul littéral et non de faire un calcul pour un exemple numérique.

Pour les calculs, utiliser un  $X$  intermédiaire.

1°)  $(g \circ f)(x) = 6x - 1$ ;  $(f \circ g)(x) = 6x + 2$ .

2°)  $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 1$ ;  $(f \circ g)(x) = (2x - 1)^2$  (il n'est pas utile de développer le résultat)

$$3^\circ) (g \circ f)(x) = 6x^3 - 2x^2 + 10x + 4; (f \circ g)(x) = 24x^3 - 4x^2 + 10x + 2$$

Dans ce cas, on préfère développer les deux expressions.

Il faut noter que toutes égalités sont quantifiées implicitement ( $\forall x \in \mathbb{R} \dots$ ).

$$\boxed{2} 1^\circ) (f \circ f)(x) = 4x - 9 \quad 2^\circ) (f \circ f)(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 1$$

Pour ce calcul, on doit calculer  $(x^2 - 3x + 1)^2$ .

Pour cela on utilise la formule d'identité remarquable pour  $(a + b + c)^2$ .

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = \underbrace{(x^2)^2 + (-3x)^2 + 1^2}_{\text{trois termes carrés}} + \underbrace{2 \times x^2 \times (-3x) + 2 \times (-3x) \times 1 + 2 \times 1 \times x^2}_{\text{3 termes rectangles}}$$

Encore une fois, la quantification est implicite ou sous-jacente.

$\boxed{3}$  Les fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont égales (il faut faire un calcul pour le démontrer).

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \text{ donc } \mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

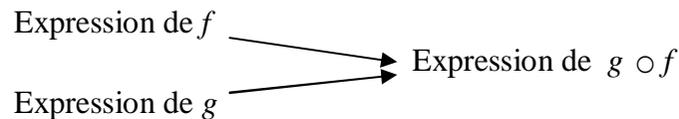
$$\forall x \in \mathbb{R} (g \circ f)(x) = \dots$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (f \circ g)(x) = \dots$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$

Dans cet exercice, il est vraiment figurer la quantification explicitement avant chaque égalité (cf. définition de deux fonctions égales).

## COMMENTAIRES D'ELEVES



Attention : une expression de fonction c'est toujours avec des  $x$  :

$$(g \circ f)(x)$$

Reparler de la **notion de variable**.

Ce chapitre permet de retravailler la **notion de variable**.

$$\begin{cases} x \in \\ f(x) \in \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ f(x) \in \mathcal{D}_g \end{cases} \quad \mathbf{2 \text{ conditions}}$$