

# Exercices d'approfondissement sur la récurrence

Les énoncés sont volontairement laissés ouverts.

1 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $2^n > n$ .

2 Pour quelles valeurs de l'entier naturel  $n$  a-t-on  $2^n > n^2$  ?

3 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

4 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $n \geq 3 \Rightarrow 3^n \geq (n+2)^2$ .

4 Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on a :  $\prod_{k=2}^{k=n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ .

5 Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$ .

---

## Indications

---

Pour l'exercice 2, on peut considérer la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2^n - n$ . On démontre que cette suite est croissante. Elle est donc minorée par son premier terme.