TS1

Contrôle du jeudi 19 septembre 2013 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (3 points)

Déterminer la forme algébrique des trois nombres complexes suivants :

$z_1 = \mathrm{i}(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2$; $z_2 = -\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})^2$; $z_3 = \dfrac{(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$.

$z_1 =$ ………………………	$z_2 =$ ………………………	$z_3 =$ ………………………

II. (4 points)

Déterminer les ensembles de solutions notés S_1, S_2, S_3, S_4 des équations suivantes d'inconnue complexe z (résolution au brouillon).

$(\mathrm{i}z+1)^2 = -1$ (1) ; $z + \dfrac{1}{z} = 1$ (2) ; $2z - (1+\mathrm{i})\overline{z} = -1+5\mathrm{i}$ (3) ; $(z-\mathrm{i})\left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{z}\right) = z - \mathrm{i}$ (4).

$S_1 =$ ………………………	$S_2 =$ ………………………	$S_3 =$ ………………………	$S_4 =$ ………………………

III. (7 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z\left(4\mathrm{i} - \overline{z}\right)$.

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

$\mathrm{Re}\,Z =$ ……………………………	$\mathrm{Im}\,Z =$ ……………………………

2°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, d'affixe z, tels que Z soit imaginaire pur.

On rédigera soigneusement à l'aide d'une chaîne d'équivalences.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (6 points)

Pour tout nombre complexe z distinct de i, on pose $z' = \dfrac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}$. *Les deux questions sont indépendantes.*

1°) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y) \neq (0\,;1)$.

Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

$\mathrm{Re}\,z' =$ ………………………	$\mathrm{Im}\,z' =$ ………………………

2°) Démontrer que l'on a : $(z'+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 2$.

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 19-9-2013

I. $z_1 = \mathrm{i}(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2$; $z_2 = -\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})^2$; $z_3 = \dfrac{(3+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$

$z_1 = -18+\mathrm{i}$	$z_2 = -18-\mathrm{i}$	$z_3 = \dfrac{1+18\mathrm{i}}{5}$

• On pouvait vérifier (ou même effectuer) tous ces calculs avec la calculatrice.

• On pouvait aussi observer que le nombre z_2 est le conjugué de z_1 ; il n'y avait donc quasiment pas de calcul à faire.

II. $(\mathrm{i}z+1)^2 = -1$ (1) ; $z + \dfrac{1}{z} = 1$ (2) ; $2z - (1+\mathrm{i})\overline{z} = -1+5\mathrm{i}$ (3) ; $(z-\mathrm{i})\left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{\overline{z}}\right) = z - \mathrm{i}$ (4)

$S_1 = \{\mathrm{i}-1 ; \mathrm{i}+1\}$	$S_2 = \left\{\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$	$S_3 = \{1+2\mathrm{i}\}$	$S_4 = \left\{\mathrm{i} ; \dfrac{2\mathrm{i}-1}{5}\right\}$

Quelques détails pour la résolution :

• (1) $\Leftrightarrow (\mathrm{i}z+1)^2 = \mathrm{i}^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}z+1 = \mathrm{i}$ ou $\mathrm{i}z+1 = -\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \ldots$

• On résout (2) dans $\mathbb{C}^*$.

(2) $\Leftrightarrow z^2+1 = z$

$\Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

Cette dernière équation est une équation du second degré à coefficients réels.
On calcule son discriminant.
On trouve $\Delta = -3$.

…

• Pour l'équation (3), on pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

• (4) $\Leftrightarrow (z-\mathrm{i})\left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{\overline{z}}\right) - (z-\mathrm{i}) = 0$

$\Leftrightarrow (z-\mathrm{i})\left(2\mathrm{i} - \dfrac{1}{\overline{z}} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (z-\mathrm{i})\left(2\mathrm{i} - 1 - \dfrac{1}{\overline{z}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow z - \mathrm{i} = 0$ ou $\dfrac{1}{\overline{z}} = 2\mathrm{i}-1$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $\overline{z} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}-1}$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $\overline{z} = \dfrac{-2\mathrm{i}-1}{5}$

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}$ ou $z = \dfrac{2\mathrm{i}-1}{5}$

III.

$Z = z(4\mathrm{i} - \overline{z})$ ($z \in \mathbb{C}$)

1°) $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y : réels)

Exprimons la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

$\mathrm{Re}\, Z = -x^2 - y^2 - 4y$	$\mathrm{Im}\, Z = 4x$

2°) **Déterminons l'ensemble $E = \{\mathrm{M}(z) \in P \,/\, Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}\}$.**

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ ($(x ; y) \in \mathbb{R}^2$).

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\, Z = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 - 4y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 = 4$

L'ensemble E est le cercle de centre Ω (0 ; – 2) et de rayon 2.

IV.

$z' = \dfrac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1} \quad (z \neq \mathrm{i})$

1°) $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y sont deux réels tels que $(x\,;\,y) \neq (0\,;1)$)

Exprimons la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

$\mathrm{Re}\, z' = \dfrac{2x}{x^2 + (-y+1)^2}$	$\mathrm{Im}\, z' = \dfrac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + (-y+1)^2}$

Solution détaillée :

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\\
&= \frac{(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}}{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)+1}\\
&= \frac{x+\mathrm{i}(y+1)}{(1-y)+\mathrm{i}x}\\
&= \frac{\left[x+\mathrm{i}(y+1)\right]\left[(1-y)-\mathrm{i}x\right]}{\left[(1-y)+\mathrm{i}x\right]\left[(1-y)-\mathrm{i}x\right]}\\
&= \frac{x(1-y)+x(y+1)+\mathrm{i}\left(-x^2+(y+1)(1-y)\right)}{(1-y)^2+x^2}\\
&= \frac{2x+\mathrm{i}\left(-x^2-y^2+1\right)}{(1-y)^2+x^2}
\end{aligned}
$$

2°) **Démontrons que : $(z'+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) = 2$.**

$$
\begin{aligned}
(z'+\mathrm{i})(z-\mathrm{i}) &= \left(\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}+\mathrm{i}\right)(z-\mathrm{i})\\
&= \frac{z+\mathrm{i}-z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\times(z-\mathrm{i})\\
&= \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}\times(z-\mathrm{i})\\
&= \frac{2(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}z+1}\\
&= 2
\end{aligned}
$$