Le symbole d'équivalence

1. Généralités

Le symbole d'équivalence remplace le « si et seulement si ».

Le symbole $\Leftrightarrow$ s'emploie entre deux propositions.

A $\Leftrightarrow$ B où A et B sont des propositions mathématiques.

A $\Leftrightarrow$ B est une nouvelle proposition mathématique créée à partir des propositions A et B.

2. Exemples

• Exemple d'utilisation correcte :

On a : $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$.

• Exemple d'utilisation incorrecte :

On pose $\text{A} = (x+1)^2$.

Il serait tout à fait incorrect d'écrire : $\text{A} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1$.

A n'est pas une proposition mathématique.
Le symbole $\Leftrightarrow$ a été employé à la place du signe =.

3. Une difficulté de langage

Malheureusement, en français, on utilise parfois le mot « équivalent » dans un sens différent de celui employé en mathématiques. Ainsi, on dira parfois que $\left(x+1\right)^2$ et x^2+2x+1 sont des formes équivalentes d'une même expression.

4. Valeur de vérité d'une équivalence

Lorsque A et B sont deux propositions, la proposition A $\Leftrightarrow$ B peut être vraie ou fausse.

• Exemple d'équivalence vraie : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

• Exemple d'équivalence fausse : $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

$\Rightarrow$ fausse

$\Leftarrow$ vraie

5. Utilisation fréquente dans les chaînes d'équivalences

- Résolution d'équations et d'inéquations

- Équations de droites, de cercles,...

- Recherche d'ensemble de points…

On peut remplacer l'expression « successivement équivalente à » par « $\Leftrightarrow$ ».

6. Quelques remarques

- Ne pas utiliser le signe « $\Leftrightarrow$ » à tort et à travers ; l'usage du symbole $\Leftrightarrow$ doit être réfléchi.

- Ne pas remplacer le signe « = » par « $\Leftrightarrow$ »

- Ne pas mélanger de « si et seulement si » avec des « $\Leftrightarrow$ »

- Ne pas utiliser d'équivalence sans rien devant

7. Ensemble de référence sous-jacent

Exemples :

• L'équivalence « $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$ » est vraie pour tous réels a et b.

• L'équivalence « $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ » est vraie :

- pour tout couple $(a\,;\,b)$ de réels positifs ou nuls ;

- pour tout couple $(a\,;\,b)$ de réels négatifs ou nuls.

On voit ici que l'ensemble de référence est tout à fait capital. Il s'agit d'une quantification d'une équivalence.
Cette quantification doit être explicite de manière générale.