1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle 29 mai 2013 (3 heures)

I. 1°) Dans un village, l'association de gymnastique comptait 50 adhérents en 2006.
Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2006+n$. On a donc $a_0=50$ et, pour tout entier naturel *n*,
$a_{n+1}=0{,}85a_n+18$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n=a_n-120$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $a_n=120-70\times 0{,}85^n$.
c) Que peut-on penser du comportement de a_n lorsque *n* tend vers $+\infty$? Répondre sans justifier.
2°) On suppose qu'au bout de quelques années le nombre d'adhérents de l'association se stabilise à 120.
De plus, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique hebdomadaire et 40 % pour deux heures.
a) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes.
Combien de séances l'association devra-t-elle prévoir par semaine ?
b) On tire successivement au hasard avec remise 20 fiches d'adhérents de l'association.
Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des fiches correspondent à des adhérents inscrits pour une heure de gymnastique ? Donner la valeur arrondie au millième.

II. Une subvention de 116 610 € est octroyée pour la recherche d'une nappe d'eau souterraine repérée par un spécialiste dans un désert.
Une entreprise donne l'estimation suivante du coût de forage : le forage du premier mètre coûte 130 € ; le forage du 2$^{\text{e}}$ mètre coûte 52 € de plus que celui du 1$^{\text{er}}$ mètre ; le forage du 3$^{\text{e}}$ mètre coûte 52 € de plus que celui du 2$^{\text{e}}$ mètre etc…
Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 52 € de plus que celui du mètre précédent.
Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on note :
- u_n le coût du forage du *n*-ième mètre en €,
- s_n le coût de forage de *n* mètres en €.

1°) Préciser la nature de la suite (u_n). En déduire, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de *n*.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $s_n=26n^2+104n$.
3°) Quelle profondeur maximale, en mètres, peut-on forer avec la subvention allouée ?

III.

Soit *a*, *b*, *c* trois réels constituant, dans cet ordre, une suite arithmétique.

Calculer *a*, *b*, *c* sachant que l'on a : $a+b+c=561$ et $abc=5\ 888\ 256$.

IV. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. *Les deux questions sont indépendantes.*
1°) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $x^2+y^2+4x=0$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre A et le rayon.
2°) On note B le point de coordonnées $(0\,;\,4)$ et C le point d'abscisse strictement positive tel que le triangle OBC soit équilatéral.
On demande de répondre aux deux questions qui suivent sans utiliser les coordonnées.
a) Calculer la distance AC (valeur exacte) en utilisant une relation métrique (on ne calculera pas les coordonnées de C).
b) Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{OAC}}$.

V. Soit ABCD un parallélogramme tel que $\text{AB}=2a$ et $\text{BC}=a$ où *a* est un réel strictement positif donné.
On note I le milieu de [CD] et α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{ADC}}$.
1°) a) Exprimer AI^2 et BI^2 en fonction de *a* et α.
b) En déduire la nature du triangle ABI.
2°) Retrouver le résultat précédent sans calcul en introduisant le milieu J du segment [AB]. Justifier rapidement.

VI. Calculer les expressions :
$A=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ et $B=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ où *x* est un réel quelconque.

Application : Calculer $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}+\cos\dfrac{13\pi}{9}$ et $\sin\dfrac{\pi}{9}+\sin\dfrac{7\pi}{9}+\sin\dfrac{13\pi}{9}$.

VII. Une société produit des bonbonnes de gaz de volume 44 dm^3. On admet que 5 % des bonbonnes n'ont pas la contenance nécessaire, et sont donc jugées non conformes. Les grossistes achètent les bonbonnes par lot de 10.
On donnera les probabilités arrondies au millième.
1°) La production est suffisamment importante pour que l'on assimile le prélèvement au hasard de 10 bonbonnes à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui à tout lot de 10 bonbonnes associe le nombre de bonbonnes non conformes.
a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
b) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il n'y ait aucune bonbonne non conforme ?
c) Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il y ait au plus deux bonbonnes non conformes ?
2°) Une association de consommateurs achète 10 lots (donc 100 bonbonnes) pour contrôler leur contenance. Elle affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux que, parmi ces cent bonbonnes, il y ait au moins cinq bonbonnes non conformes. Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bonbonnes prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de bonbonnes non conformes.
a) Quelle est la loi suivie par Y ?
b) L'affirmation des consommateurs est-elle fondée ?

VIII. On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k\in\{1\,;2\,;3\,;4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre *k* sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression* arithmétique.
1°) Sachant que $p_4=0{,}4$, démontrer que $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}2$ et $p_3=0{,}3$.
2°) On lance le dé deux fois de suite. On suppose que les lancers sont indépendants.
On calcule la somme des chiffres inscrits sur les faces cachées à l'issue des deux lancers.
Est-il plus probable d'obtenir une somme égale à 5 ou d'obtenir une somme égale à 6 ?
On rappelle que le dé est truqué. Aurait-on obtenu le même résultat avec un dé non truqué ?
* suite

Corrigé du contrôle du 29-5-2013

I. 1°) Dans un village, l'association de gymnastique comptait 50 adhérents en 2006.
a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2006+n$. On a donc $a_0=50$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,85a_n+18$.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=a_n-120$.

a) **Démontrons que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.**

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}&=a_{n+1}-120\\&=0,85a_n+18-120\\&=0,85a_n-102\\&=0,85(a_n-120)\\&=0,85u_n\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=a_0-120=-70$ et de raison 0,85.

b) **Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=120-70\times 0,85^n$.**

D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=-70\times 0,85^n$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=a_n-120$.

Donc $a_n=u_n+120$.

Par suite, $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=120-70\times 0,85^n$.

c) **Que peut-on penser du comportement de a_n lorsque n tend vers + ∞ ?**

On peut penser que lorsque n tend vers + ∞, a_n tend vers 120.

2°) On suppose qu'au bout de quelques années le nombre d'adhérents de l'association se stabilise à 120.
De plus, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique hebdomadaire et 40 % pour deux heures.

a) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes.
Déterminons le nombre de séances que l'association devra prévoir par semaine.

60 % des 120 adhérents sont inscrits pour une heure.

$$\frac{60}{100}\times 120=72$$

72 personnes sont inscrites pour 1 heure.

40 % des adhérents sont inscrits pour 2 heures.

$$\frac{40}{100}\times 120=48$$

48 personnes sont inscrites pour 2 heures.

$$\frac{48\times 2+72}{20}=8,4$$

Il faut que le club prévoie 9 séances par semaines.

Autre méthode : Mathilde Nitsas

60 % des 120 adhérents sont inscrits pour une heure.

$$\frac{60}{100}\times 120=72$$

Il y a 72 personnes sont inscrites pour 1 heure.

$$\frac{72}{20}=3,6$$

40 % des adhérents sont inscrits pour 2 heures.

$$\frac{40}{100}\times 120=48$$

Il y a 48 personnes sont inscrites pour 2 heures.

$$\frac{48}{20}=4,8$$

Le club doit donc prévoir 8,4 heures d'entraînement c'est-à-dire 9 séances et un cours à effectif réduit.

b) On tire successivement au hasard avec remise 20 fiches d'adhérents de l'association.

Déterminons la probabilité qu'au moins la moitié des fiches correspondent à des adhérents inscrits pour une heure de gymnastique.

On est dans le cas d'un schéma de Bernoulli.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adhérents à 1 heure.

X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ (nombres d'épreuves) et $p=0,6$ (probabilité d'un succès).

$$P(\mathrm{X}=10)=\binom{20}{10}\times(0,6)^{10}\times(0,6)^{10}$$

$P(\mathrm{X}=10)\approx 0,117$ (valeur arrondie au millième)

II. Une subvention de 116 610 € est octroyée pour la recherche d'une nappe d'eau souterraine repérée par un spécialiste dans un désert.
Une entreprise donne l'estimation suivante du coût de forage : le forage du premier mètre coûte 130 € ; le forage du 2e mètre coûte 52 € de plus que celui du 1er mètre ; le forage du 3e mètre coûte 52 € de plus que celui du 2e mètre etc…
Plus généralement, le forage de chaque mètre supplémentaire coûte 52 € de plus que celui du mètre précédent.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :
- u_n le coût du forage du n-ième mètre en €,
- s_n le coût de forage de n mètres en €.

1°) **Précisons la nature de la suite (u_n).**

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + 52$

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 130$ et de raison $r = 52$.

Déduisons-en pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 130 + (n-1) \times 52$$

$$= 52n - 78$$

2°) **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = 26n^2 + 104n$.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= \frac{n(130 + 78 + 52n)}{2}$$

$$= \frac{n(208 + 52n)}{2}$$

$$= n(104 + 26n)$$

$$= 104n + 26n^2$$

3°) **Déterminons la profondeur maximale que l'on peut forer avec la subvention allouée.**

On cherche les entiers naturels n non nuls tels que l'on ait : $s_n \leqslant 116610 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 104n + 26n^2 \leqslant 116610$$

$$\Leftrightarrow 26n^2 + 104n - 116\,610 \leqslant 0$$

Considérons le polynôme du second degré $26x^2 + 104x - 116\,610$.

Son discriminant est égal à : $\Delta = 10\,816 + 12\,127\,440 = 12\,138\,256$.

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-104 + 38484}{52} = 65$ et $x_2 = \dfrac{-104 - 38484}{52} - 69$.

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré, on a :

x	$-\infty$		-69		65		$+\infty$
Signe de $26x^2 + 104x - 116\,610$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $26n^2 + 104n - 116\,610 \leqslant 0$ pour les valeurs de n entières comprises entre 0 et 65 au sens large.

Le plus grand entier naturel n vérifiant $26n^2 + 104n - 116\,610 \leqslant 0$ est 65.
Par conséquent, la profondeur maximale que l'on peut forer avec la subvention allouée est de 65 mètres.

III.

a, b, c : trois réels constituant, dans cet ordre, une suite arithmétique

Calculons a, b, c sachant que l'on a $a + b + c = 561$ (1) et $abc = 5\,888\,256$ (2).

Notons r la raison de la suite.
On a : $a = b - r$ et $c = b + r$.
D'après (1), on a : $(b - r) + b + (b + r) = 561$.
Par suite, $3b = 561$ d'où $b = 187$.

On a donc $a = 187 - r$ et $c = 187 + r$.

(2) donne alors : $(187 - r) \times 187 \times (187 + r) = 5\,888\,256 \quad (2')$.

$$(2') \Leftrightarrow (187 - r) \times (187 + r) = 31\,488$$

$$\Leftrightarrow 187^2 - r^2 = 31\,488$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 3\,481$$

$$\Leftrightarrow r = 59 \text{ ou } r = -59$$

1er cas : $r = 59$

$a = 187 - 59 = 128$
$c = 187 + 59 = 236$

2e cas : $r = -59$

$a = 187 + 59 = 236$
$c = 187 - 59 = 128$

IV.

1°) **Démontrons que l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $x^2+y^2+4x=0$ est un cercle.**

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\mathrm{M}\in\mathscr{C} \Leftrightarrow x^2+4x+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+y^2=0 \text{ (mise sous forme canonique du polynôme du second degré } x^2+4x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=4$$

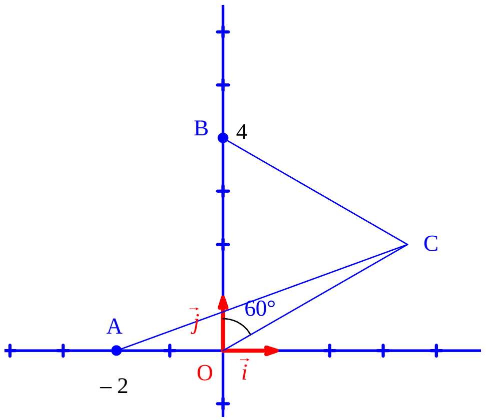
Donc l'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\mathrm{A}(-2\,;0)$ et de rayon 2.

Mauvaise rédaction :

On a une équation de la forme $(x-x_{\mathrm{A}})^2+(y-y_{\mathrm{A}})^2=r^2$.
Donc l'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\mathrm{A}(-2\,;0)$ et de rayon 2.

2°) B(0 ; 4)

C : point d'abscisse strictement positive tel que le triangle OBC soit équilatéral



a) **Calculons la distance AC.**

On utilise la formule du côté : $\mathrm{AC}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OC}\times\cos\widehat{\mathrm{AOC}}$.

Or OBC est un triangle équilatéral donc $\mathrm{BC}=\mathrm{OC}=\mathrm{OB}=4$.

De plus, $\widehat{\mathrm{BOC}}=60°$.

D'autre part, on a : $\widehat{\mathrm{BOA}}=90°$ (car les axes du repère sont orthogonaux).

D'où $\widehat{\mathrm{AOC}}=\widehat{\mathrm{AOB}}+\widehat{\mathrm{BOC}}=90°+60°=150°$.

Donc

$$\mathrm{AC}^2=4+16-16\cos\widehat{\mathrm{AOC}}$$

$$=20-16\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=20+8\sqrt{3}$$

On en déduit que $\mathrm{AC}=\sqrt{20+8\sqrt{3}}$.

On peut calculer une valeur approchée de AC à la calculatrice et voir que cela correspond à peu près à la distance mesurée sur le graphique.

b) **Déterminons la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{OAC}}$.**

1ère méthode :

D'après la formule du côté dans le triangle AOC, on a : $\mathrm{OC}^2=\mathrm{AO}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AO}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{OAC}}$.

Donc $2\mathrm{AO}\times\mathrm{AC}\times\cos\widehat{\mathrm{OAC}}=\mathrm{AO}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{OC}^2$.

D'où $2\times2\times\sqrt{20+8\sqrt{3}}\times\cos\widehat{\mathrm{OAC}}=4+20+8\sqrt{3}-16$.

$4\sqrt{20+8\sqrt{3}}\times\cos\widehat{\mathrm{OAC}}=8+8\sqrt{3}$ ou $\sqrt{20+8\sqrt{3}}\times\cos\widehat{\mathrm{OAC}}=2+2\sqrt{3}$

Donc $\cos\widehat{\mathrm{OAC}}=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{20+8\sqrt{3}}}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{\mathrm{OAC}}=20{,}1039093...°$.

On a donc $\widehat{\mathrm{OAC}}\approx 20{,}1°$ (valeur arrondie au dixième).

On peut voir que cela correspond à peu près à la valeur obtenue par mesure au rapporteur sur le graphique.

2e méthode :

D'après la loi des sinus dans le triangle AOC, on a : $\dfrac{\mathrm{OC}}{\sin\widehat{\mathrm{OAC}}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\widehat{\mathrm{AOC}}}$.

Donc $\sin\widehat{\mathrm{OAC}}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}}{\sqrt{20+8\sqrt{3}}}=\dfrac{2}{\sqrt{20+8\sqrt{3}}}$.

On a donc $\widehat{\mathrm{OAC}}\approx 20{,}1°$ (valeur arrondie au dixième).

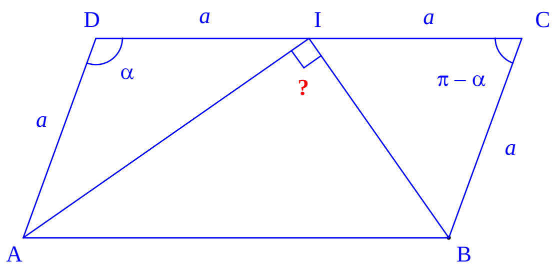
J'aurais pu demander en plus l'aire du triangle AOC.

V.

ABCD : parallélogramme tel que $AB = 2a$ et $BC = a$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$

I : milieu de [CD]

α : mesure en radians de l'angle $\widehat{ADC}$



1°) a) **Exprimons AI^2 et BI^2 en fonction de a et α.**

D'après la formule du côté dans le triangle ADI,

$$\begin{aligned} AI^2 &= AD^2 + DI^2 - 2AD \times DI \times \cos\alpha \\ &= a^2 + a^2 - 2a^2 \cos\alpha \\ &= 2a^2 - 2a^2\cos\alpha \\ &= 2a^2(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

D'après la formule du côté dans le triangle BCI,

$$\begin{aligned} BI^2 &= BC^2 + IC^2 - 2BC \times IC \times \cos(\pi-\alpha) \\ &= a^2 + a^2 + 2a^2\cos\alpha \\ &= 2a^2 + 2a^2\cos\alpha \\ &= 2a^2(1+\cos\alpha) \end{aligned}$$

$BI^2 = 2a^2 - 2a^2\cos(\pi-\alpha) = 2a^2 + 2a^2\cos\alpha$

b) **En déduire la nature du triangle ABI.**

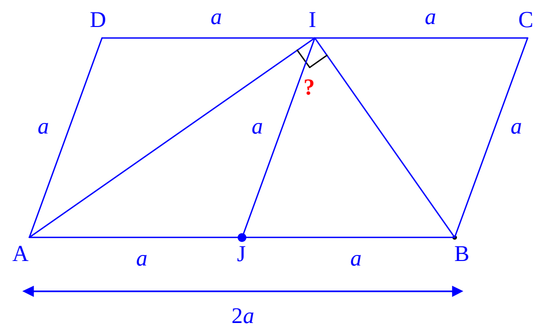
$AI^2 + BI^2 = 2a^2(1-\cos\alpha) + 2a^2(1+\cos\alpha) = 4a^2 = AB^2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABI est rectangle en I.

2°) **Retrouvons le résultat précédent sans calcul en introduisant le milieu J du segment [AB].**

On a : $IJ = a$ et $AB = 2a$.

Or un triangle dont la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de celle de ce côté est rectangle.
On en déduit que le triangle ABI est rectangle en I.



VI.

Calculons les expressions :

$A = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ et $B = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ où x est un réel quelconque.

$$\begin{aligned} A &= \cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \cos x + \cos x \times \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \times \sin\frac{2\pi}{3} + \cos x \times \cos\frac{4\pi}{3} - \sin x \times \sin\frac{4\pi}{3} \quad \text{(on laisse le } \cos x \text{ tel quel)} \\ &= \cos x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \sin x + \sin x \times \cos\frac{2\pi}{3} + \cos x \times \sin\frac{2\pi}{3} + \sin x \times \cos\frac{4\pi}{3} + \cos x \times \sin\frac{4\pi}{3} \\ &= \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Application : Calculons $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$ et $\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} + \sin\frac{13\pi}{9}$.

On applique le résultat précédent pour $x = \frac{\pi}{9}$.

On trouve $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} + \sin\frac{13\pi}{9} = 0$.

VII.

1°)

a) **Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.**

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.

b) **Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il n'y ait aucune bonbonne non conforme ?**

$$P(\mathrm{X}=0) = \binom{10}{0} \times (0,05)^0 \times (0,95)^{10}$$

$$P(\mathrm{X}=0) = 0,598736939\ldots$$

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{X}=0)$ est 0,599.

La probabilité pour que dans un lot de 10 bonbonnes il n'en ait aucune non conforme est environ égale à 0,599.

c) **Quelle est la probabilité que, dans un lot de 10, il y ait au plus deux bonbonnes non conformes ?**

On peut utiliser la calculatrice (fonction de répartition de la loi binomiale) : $P(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0,988496442\ldots$.

La valeur arrondie au millième de $P(\mathrm{X} \leqslant 2)$ est 0,988.

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} \leqslant 2) &= P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2) \\ &= \binom{10}{0} \times (0,05)^0 \times (0,95)^{10} + \binom{10}{1} \times (0,05)^1 \times (0,95)^9 + \binom{10}{2} \times (0,05)^2 \times (0,95)^8 \end{aligned}$$

$$P(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0,988\ldots$$

2°)

a) **Quelle est la loi suivie par Y ?**

Y suit la loi binomiale de paramètres $n' = 100$ et $p = 0,05$.

b) **L'affirmation des consommateurs est-elle fondée ?**

$$P(\mathrm{Y} \geqslant 5) = 1 - P(\mathrm{Y} \leqslant 4)$$

$$P(\mathrm{Y} \geqslant 5) = 0,564018701\ldots$$

$$P(\mathrm{Y} \geqslant 5) \geqslant 0,5$$

Donc l'affirmation des consommateurs est bien fondée.

VIII.

1°) **Démontrons que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.**

On utilise la formule : $p_k = p_l + (k-l)r$.

On a :

$p_3 = p_4 - r = 0,4 - r$

$p_2 = p_4 - 2r = 0,4 - 2r$

$p_1 = p_4 - 3r = 0,4 - 3r$

Par ailleurs, on sait que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

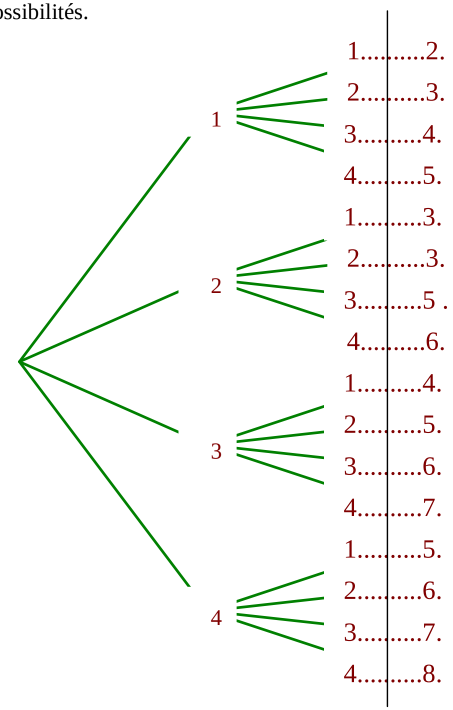
D'où $0,4 + 0,4 - r + 0,4 - 2r + 0,4 - 3r = 1$.
Par conséquent, $-6r = -0,6$ d'où $r = 0,1$.

On en déduit que $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$ et $p_3 = 0,3$.

2°) **Déterminons s'il est plus probable d'obtenir une somme égale à 5 ou d'obtenir une somme égale à 6.**

Pour répondre à la question, on est obligé de faire des calculs (on ne peut pas répondre sans calculs).

On peut dresser un arbre de possibilités.



On peut surligner en jaune les combinaisons qui donnent la somme 5 et en vert les combinaisons qui donnent la somme 6.

$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 5 »}\right) = p_1 \times p_4 + p_2 \times p_3 + p_2 \times p_3 + p_4 \times p_1$

$= 0{,}1 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}1$

$= 0{,}2$

$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 5 »}\right) = p_1 \times p_4 + p_2 \times p_3 + p_2 \times p_3 + p_4 \times p_1$

$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 6 »}\right) = 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}2$

$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 6 »}\right) = 0{,}25$

$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 5 »}\right) \leqslant P\left(\text{« obtenir une somme égale à 6 »}\right)$

Si le dé n'est pas truqué, on aurait obtenu le contraire.
On calcule les nouvelles probabilités en dressant un arbre de possibilités. Il y a 16 issues pour l'expérience aléatoire.
On peut aussi reprendre le même raisonnement : chaque face à la probabilité $\frac{1}{4}$.

$$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 5 »}\right) = \frac{4}{16} \qquad (= 0{,}25)$$

$$P\left(\text{« obtenir une somme égale à 6 »}\right) = \frac{3}{16} \qquad (= 0{,}1875)$$

On a : $P\left(\text{« obtenir une somme égale à 5 »}\right) \geqslant P\left(\text{« obtenir une somme égale à 6 »}\right)$.

Avec un dé non truqué, il est plus probable d'avoir une somme égale à 5.

Il y a plus de possibilités pour la somme égale à 5 que pour la somme égale à 6 et le dé n'est pas truqué donc on peut répondre rapidement.

Autre rédaction possible :

Les couples correspondant à une somme égale à 5 sont : (1 ; 4), (4 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2).

Les couples correspondant à une somme égale à 6 sont : (2 ; 4), (3 ; 3), (4 ; 2).

Attention, on écrit bien les couples avec des parenthèses et non avec des accolades.
Ensuite, il y a des calculs à faire.