

La notion de grandeur

S'appuyer sur quelques grandeurs importantes pour redonner du sens aux contenus mathématiques enseignés au collège suppose d'avoir les idées claires sur ce qu'est une grandeur.

De façon rapide, on pourrait dire que les grandeurs fondamentales qui intéressent le collège sont les suivantes : longueur, aire, volume, angle masse, temps, température, prix, vitesse. Mais tous ces mots désignent-ils bien des grandeurs ? Et dans l'affirmative, ces grandeurs sont-elles toutes de même nature ?

Dans le vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie, la grandeur est définie comme *l'attribut d'un corps ou d'une substance qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement*.

On voit tout de suite que la notion de prix pose problème puisqu'elle ne fait pas intervenir une qualité de l'objet mais seulement une quantité numérique qui lui est associée. Si l'on veut rester dans le domaine des grandeurs, il va falloir plutôt parler de **valeur** d'un objet. Le prix sera alors une mesure de la valeur de cet objet. Ceci corrigé, voici une classification possible en trois types de grandeurs : les grandeurs mesurables, les grandeurs repérables et les indicateurs.

Les grandeurs mesurables

Ce sont les grandeurs les plus mathématiques. Entrent dans cette catégorie les longueurs, les aires, les volumes, les masses, les valeurs, les vitesses et avec quelques restrictions les angles non orientés (à cause de la limite de l'angle plein). Elles sont caractérisées par l'existence d'une relation d'équivalence et d'une relation d'ordre total permettant de comparer, pour la grandeur donnée, différents objet entre eux. Sur les classes d'équivalence on peut définir une addition interne et la multiplication par un scalaire, compatibles avec une relation d'ordre. De telles grandeurs sont très confortables puisqu'elles autorisent les comparaisons et les calculs.

Les grandeurs repérables

Le temps ou la température en sont des exemples. Ce sont des grandeurs sur lesquelles on ne peut a priori définir d'addition interne ou de multiplication par un scalaire. Elles sont associées à la définition d'une échelle fixée par convention. Mais la place d'une grandeur dans cette catégorie n'est pas toujours figée et peut évoluer avec les connaissances que l'ont acquiert de celle-ci. Voici par exemple comment s'est opéré ce glissement dans le cas de la température.

La température

Si l'on plonge un fil de cuivre dans une casserole d'eau en ébullition et que l'on attend un peu, on observe tout d'abord une dilatation de fil puis sa longueur se stabilise : le fil est en équilibre thermique avec le bain. L'eau et le fil sont alors à la même « température ». Le fil peut donc servir de thermomètre. Pour construire une échelle de température, le choix va plutôt se porter sur une fonction continue et monotone qui associe à chaque température la longueur du fil. Son intérêt étant d'être inversible. On peut choisir par exemple une fonction affine. Il faut maintenant fixer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine. Pour cela on peut utiliser la propriété de l'eau pure de fondre et de bouillir à température fixe sous une pression donnée. On attribue arbitrairement les valeurs 0 et 100 aux températures correspondant à ces deux états et l'on mesure les deux longueurs du fil de cuivre. On vient ainsi de construire à une échelle centésimale. La résolution d'une équation du premier degré permet d'associer à chaque longueur de fil une température.

Cette échelle n'a pas toutes les qualités. Tout d'abord son unité n'a pas été définie ; il est par exemple sans signification de dire qu'une température de 2 degrés est deux fois plus grande qu'une température de 1 degré. Elle dépend par ailleurs du métal choisi. Avec un métal différent, par la même méthode, on construirait une autre échelle qui ne coïnciderait avec la précédente que pour les deux valeurs de référence. La longueur d'un fil métallique n'est une fonction affine de la température que de manière approximative. Les physiciens ont donc cherché une échelle qui ne dépende pas des propriétés particulières du corps choisi. Cette échelle a été trouvée, c'est l'échelle des gaz parfaits. Pour les faibles pressions, on a constaté expérimentalement pour tous les gaz que si l'on trace le graphique du produit du volume par la pression en fonction de la pression et ceci à température constante (isothermes d'Amagat), on obtient une suite de points alignés. En prolongeant la droite ainsi construite jusqu'à l'axe des ordonnées on peut lire une valeur. Ce qui est remarquable c'est le **rapport** entre les valeurs lues sur l'axe des ordonnées pour deux températures différentes et indépendant de la nature du

gaz. Ce rapport est défini comme le rapport des deux températures. Ainsi on obtient expérimentalement un rapport de 1,36 610 entre la température de la fusion de la glace et de la température de l'ébullition de l'eau. Pour obtenir une échelle centésimale, il faut alors résoudre l'équation

$T_{\text{ébullition de l'eau}} = T_{\text{glace fondante}} + 100 = 1,36\ 610 \times T_{\text{glace fondante}}$ et on obtient $T_{\text{ébullition de l'eau}} = 273,15\ \text{K}$ (le Kelvin est l'unité de température absolue) et donc $T_{\text{ébullition de l'eau}} = 373,15\ \text{K}$.

L'échelle Celsius est une simple translation $t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$. Sans entrer dans les détails, Newton, en définissant le temps dynamique absolu, et Kelvin, en définissant la température absolue, ont ainsi pu donner un sens à la multiplication externe. Mais l'additivité fait toujours défaut dans ces deux cas. On parle alors de grandeurs mesurables non additives. En revanche, sans disposer des notions de temps dynamique absolu ou de température absolue, il est possible de récupérer des grandeurs mesurables en considérant les durées ou les gradients de température. On a en quelque sorte vectorialisé la grandeur.

Pour finir, on appelle **indicateur**, une grandeur pour laquelle une relation d'équivalence ou d'ordre total ne peut même pas être définie. Il s'agit d'alors d'une indication résumant un ensemble de grandeurs mesurées. Ce n'est donc même pas une grandeur repérable. Un exemple parlant est la note attribuée à un élève lors d'un contrôle.

Source : « Enseigner les mathématiques en 6^e : Les durées » - IREM de Poitiers page 98