2^{e} Devoir

I. Le but de l'exercice est de déterminer les réels x, y, z, t de telle sorte que la somme des nombres d'une même ligne ou d'une même colonne du tableau ci-dessous donne le même nombre S.

$\frac{7}{12}$	t	y
$-\frac{5}{36}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{36}$
x	$\frac{49}{36}$	z

1°) Calculer S.
2°) Déterminer x, y, z, t (valeurs exactes sous la forme la plus simple possible).
3°) Calculer la somme des nombres de chacune des deux diagonales.
On dit que le tableau ci-dessus est un carré magique additif.

II. Le but de l'exercice est de déterminer les réels a, b, c, d de telle sorte que le produit des nombres d'une même ligne ou d'une même colonne du tableau ci-dessous donne le même nombre P.

2	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-2$
a	d	c
$\sqrt{6}+2$	b	1

1°) Calculer P.
2°) Déterminer a, b, c, d (valeurs exactes sous la forme la plus simple possible).
3°) Calculer le produit des nombres de chacune des deux diagonales.
On dit que le tableau ci-dessus est un carré magique multiplicatif.

III. On considère un rectangle ABCD tel que $\text{AB}=9$ et $\text{AD}=4$. On note E le point du segment [AB] tel que $\text{AE}=1$ et F le milieu du segment [BC].

1°) Calculer l'aire de chacun des triangles AED, EBF et CDF ; en déduire l'aire du triangle DEF.
2°) a) Calculer DE, EF et DF (valeurs exactes) ; en déduire que le triangle DEF est rectangle (préciser le sommet de l'angle droit).
b) Retrouver par un calcul direct, en utilisant la question a), l'aire du triangle DEF.
3°) Démontrer que les points C, D, E, F appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

Corrigé du DM

I. Le but de l'exercice est de déterminer les réels x, y, z, t de telle sorte que la somme des nombres d'une même ligne ou d'une même colonne du tableau ci-dessous donne le même nombre S.

$\frac{7}{12}$	t	y
$-\frac{5}{36}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{36}$
x	$\frac{49}{36}$	z

1°) Calculer S.

$$
\begin{aligned}
S &= \left(-\frac{5}{36}\right) + -\frac{1}{6} + -\frac{7}{36} \\
&= -\frac{5}{36} - \frac{1}{6} - \frac{7}{36} \\
&= -\frac{18}{36} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2°) Déterminer x, y, z, t (valeurs exactes sous la forme la plus simple possible).

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{36}\right) - \frac{7}{12} \\
&= -\frac{18}{36} + \frac{5}{36} - \frac{21}{36} \\
&= -\frac{34}{36} \\
&= -\frac{17}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{18}{36} + \frac{7}{36} + \frac{33}{36} \\
&= \frac{22}{36} \\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

$$z = -\frac{18}{36} - \frac{49}{36} + \frac{34}{36}$$
$$= -\frac{33}{36}$$
$$= -\frac{11}{12}$$

$$t = -\frac{18}{36} - \frac{49}{36} + \frac{6}{36}$$
$$= -\frac{61}{36}$$

$\frac{7}{12}$	$-\frac{61}{36}$	$\frac{11}{18}$
$-\frac{5}{36}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{36}$
$-\frac{17}{18}$	$\frac{49}{36}$	$-\frac{11}{12}$

3°) Calculer la somme des nombres de chacune des deux diagonales.
On dit que le tableau ci-dessus est un carré magique additif.

On note :
A la somme des nombres de la diagonale contenant x et y ;
B la somme des nombres de la diagonale contenant z.

$$\mathrm{A} = -\frac{17}{18} + \frac{11}{18} - \frac{3}{18}$$
$$= -\frac{9}{18}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{B} = \frac{21}{36} - \frac{6}{36} - \frac{33}{36}$$
$$= -\frac{18}{36}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

II. Le but de l'exercice est de déterminer les réels a, b, c, d de telle sorte que le produit des nombres d'une même ligne ou d'une même colonne du tableau ci-dessous donne le même nombre P.

2	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-2$
a	d	c
$\sqrt{6}+2$	b	1

1°) Calculer P.

$$\begin{aligned} P &= 2\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{12}-2\sqrt{2}+\sqrt{18}-2\sqrt{3}\right) \\ &= 2\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2°) Déterminer a, b, c, d (valeurs exactes sous la forme la plus simple possible).

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}\left(\sqrt{6}+2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\times\left(\sqrt{6}-2\right)}{\left(\sqrt{6}+2\right)\times\left(\sqrt{6}-2\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\times\left(\sqrt{6}-2\right)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2} \\ &= 2\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2} \\ &= 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \quad \text{(on reprend le résultat du calcul de } a\text{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}\times\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\times\left(\sqrt{6}+2\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}\times\left(\sqrt{6}+2\right)}{\cancel{2}} \\
&= \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+2\sqrt{2} \\
&= 2\sqrt{3}+2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\times\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\times 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\times \cancel{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{1} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

2	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-2$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ c
$\sqrt{6}+2$	$2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$	1

3°) Calculer le produit des nombres de chacune des deux diagonales.
On dit que le tableau ci-dessus est un carré magique multiplicatif.

On note :
A le produit des nombres de la diagonale contenant 2, 1 et *d* ;
B le produit des nombres de l'autre diagonale.

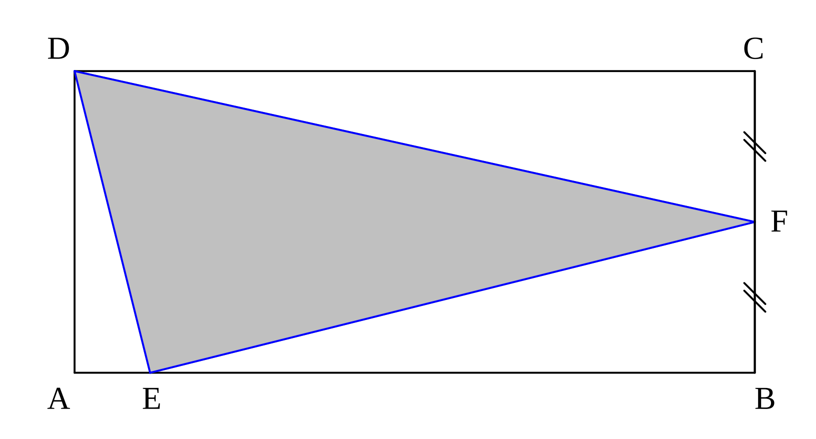
$$A = 2\sqrt{2}$$
$$= -\frac{9}{18}$$
$$= -\frac{1}{2}$$

$$B = \left(\sqrt{6}+2\right)\times\left(\sqrt{6}-2\right)\times\sqrt{2}$$
$$= (6-4)\times\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

III.

On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 9$ et $AD = 4$. On note E le point du segment [AB] tel que $AE = 1$ et F le milieu du segment [BC].

On commence par faire une figure codée.



1°) Calculer l'aire de chacun des triangles AED, EBF et CDF ; en déduire l'aire du triangle DEF.

$$\mathcal{A}_{\text{AED}} = \frac{AE \times AD}{2}$$
$$= \frac{1\times 4}{2}$$
$$= \frac{4}{2}$$
$$= 2$$

$$\mathcal{A}_{\text{EBF}} = \frac{BF \times BE}{2}$$
$$= \frac{\cancel{2}\times 8}{\cancel{2}}$$
$$= 8$$
$$= 2$$

$$\mathcal{A}_{\text{DCF}} = \frac{DC \times FC}{2}$$
$$= \frac{9\times \cancel{2}}{\cancel{2}}$$
$$= 9$$

$$\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = 9\times 4$$
$$= 36$$

$$\mathcal{A}_{\text{DEF}} = \mathcal{A}_{\text{ABCD}} - \left(\mathcal{A}_{\text{AED}} + \mathcal{A}_{\text{EBF}} + \mathcal{A}_{\text{DCF}}\right)$$
$$= 36 - (9 + 8 + 2)$$
$$= 36 - 19$$
$$= 17$$

2°) a) Calculer DE, EF et DF (valeurs exactes) ; en déduire que le triangle DEF est rectangle (préciser le sommet de l'angle droit).

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE rectangle en A, on a :

$$\text{DE}^2 = \text{AD}^2 + \text{AE}^2$$
$$= 4^2 + 1^2$$
$$= 16 + 1$$
$$= 17$$

$\text{DE} \geqslant 0$ donc $\text{DE} = \sqrt{17}$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BEF rectangle en E, on a :

$$\text{EF}^2 = \text{BE}^2 + \text{BF}^2$$
$$= 8^2 + 2^2$$
$$= 64 + 4$$
$$= 68$$

$\text{EF} \geqslant 0$ donc $\text{EF} = \sqrt{68}$ ou encore $\text{EF} = 2\sqrt{17}$ (forme du résultat utile pour la question 2°) b)).

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CDF rectangle en C, on a : $\text{DF}^2 = \text{CD}^2 + \text{CF}^2$

$$= 9^2 + 2^2$$
$$= 81 + 4$$
$$= 85$$

$\text{DF} \geqslant 0$ donc $\text{DF} = \sqrt{85}$.

Démontrons que le triangle DEF est rectangle.

D'une part, on a : $\text{DF}^2 = 85$.
D'autre part, on a : $\text{EF}^2 + \text{ED}^2 = 17 + 68 = 85$.
On constate que $\text{EF}^2 + \text{ED}^2 = \text{DF}^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en E.

b) Retrouver par un calcul direct, en utilisant la question a), l'aire du triangle DEF.

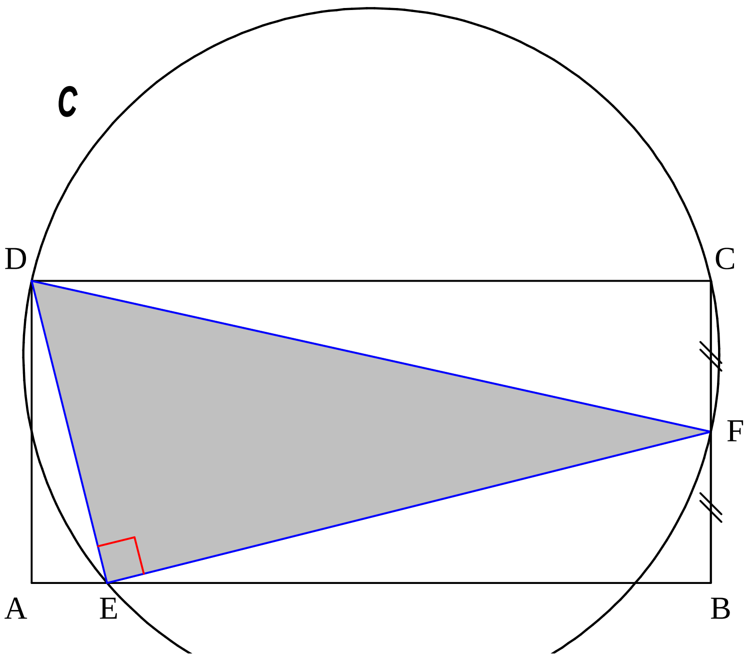
Comme DEF est rectangle en E, on a $\mathcal{A}_{\text{DEF}} = \dfrac{\text{EF} \times \text{ED}}{2}$.

Grâce aux calculs de EF et ED effectués à la question a), on peut écrire $\mathcal{A}_{\text{DEF}} = \dfrac{\sqrt{17} \times \cancel{2}\sqrt{17}}{\cancel{2}}$.

On obtient immédiatement que $\mathcal{A}_{\text{DEF}} = 17$, résultat qui correspond bien à celui trouvé à la question 1°).

3°) Démontrer que les points C, D, E, F appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [DF].



On sait que DEF est rectangle en E et que DFC est rectangle en C donc $E \in \mathcal{C}$ et $C \in \mathcal{C}$.
On en déduit que C, D, E, F appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.