# Calcul des propositions et calcul des prédicats

L'objectif est d'introduire quelques éléments de logique en liaison avec l'enseignement de l'algorithmique et de l'informatique. Il s'agit d'une brève étude destinée à familiariser les élèves à une pratique élémentaire du calcul portant sur des énoncés.

| CONTENUS | CAPACITÉS ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| **Calcul propositionnel** | | |
| Proposition, valeur de vérité.<br>Proposition qui ont la même signification. | | |
| Connecteurs logiques :<br>- négation (non $P$, $\neg P$, $\overline{P}$) ;<br>- conjonction ($P$ et $Q$, $P \wedge Q$) ;<br>- disjonction ($P$ ou $Q$, $P \vee Q$) ;<br>- implication ($P \Rightarrow Q$) ;<br>- équivalence ($P \Leftrightarrow Q$). | • Savoir donner la table de vérité des connecteurs logiques. | On dégage les propriétés fondamentales des opérations introduites. |
| Lois de Morgan (en situation). | | |
| Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante. | • Savoir distinguer condition nécessaire et condition suffisante.<br><br>• Savoir exprimer correctement une condition nécessaire ou une condition suffisante (expressions « il faut », « il suffit »)<br><br>• Savoir exprimer correctement une équivalence (expression « il faut et il suffit » ; locution « si et seulement si ») | On se limite au cas où l'utilisation d'une table de vérité ou de propriétés élémentaires du calcul propositionnel permet de conclure sans excès de technicité. |
| Réciproque d'une implication.<br>Contraposée d'une implication.<br>Négation d'une implication. | • Traiter un exemple simple de calcul portant sur un énoncé.<br><br>• Utiliser des connecteurs logiques pour exprimer une condition. | Cette capacité est également mise en œuvre en algorithmique. |

| | | |
|---|---|---|
| **Calcul des prédicats**<br><br>Variable, constante.<br>Phrase ouverte.<br><br>Quantificateurs $\forall$, $\exists$.<br>Référentiel.<br><br>Négation de $\forall x, p(x)$ ;<br>négation de $\exists x, p(x)$. | • Passer du langage courant au langage mathématique et inversement.<br><br>• Exprimer, dans un cas simple, la négation d'un prédicat. | On se limite à des cas simples de prédicats portant sur une, deux ou trois variables.<br><br>On met en valeur l'importance de l'ordre dans lequel deux quantificateurs interviennent. |

**Introduction historique :** logique- philosophie-linguistique

Les propositions conditionnelles (le conditionnel courant)

L'implication matérielle entre propositions : notion définie par une tale de vérité
Absence de lien de cause à conséquence

L'implication ouverte entre prédicats

L'implication formelle (implication ouverte universellement quantifiée)

Calcul des prédicats

L'implication ouverte p(x) entraîne
L'implication formelle

Linguistique :

« Résoudre dan IR l'équation $x^2 = 4$ (1).

Les solutions de (1) sont 2 et – 2/

2 et – 2 sont solutions de (1).

2 et – 2 sont les seules solutions de (1)

**Viviane Durand-Guerrier**
**Limoges 21/04/2010**
**Frege distingue :**
**l'affirmation d'un énoncé conditionnel de la forme**
**"si A, alors B"**
**et les inférences**
**«(Si B, alors A) vrai ; or B vrai ; Donc A vrai»**
**(Modus Ponens)**
**« (Si C, alors B) vrai ; (si B, alors A) vrai**
**donc (si C, alors A) vrai »**
**(Transitivité de la relation d'antécédent à conséquent)**

Logique et raisonnement mathématique
Aspects épistémologiques et didactiques

Sur l'implication (Partie 1)
Viviane DURAND-GUERRIER
vdurand@math.univ-montp2.fr
Université de Montpellier 2
Département de mathématiques
I3M, équipe ACSIOMPlan de la communication
I. L'Antiquité grecque : Mégariques, Stoïciens, Aristote
II. Le renouveau de la logique : Frege, Russell
III. Le point de vue sémantique en logique : Wittgenstein, Tarski

Une extension des connecteurs logiques (2)
Implication
"Une implication ouverte "P(x)  Q(x)" est satisfaite par les éléments qui satisfont P(x) et Q(x), et par ceux qui ne satisfont pas Q(x)".

Exemple
« Déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 qui satisfont la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est premier »

Réponse donnée le plus souvent
2, 4, 6, 10, 12, 16, 18
Réponse correcte en référence à la définition de l'implication en logique classique
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19

Viviane Durand-Guerrier

IREM de Montpellier 5 mai 2010 18
Plusieurs notions d'implications
Implication entre propositions "si A, alors B"
Cette relation entre proposition est équivalente à la relation "non A ou B"
Elle est fausse dans le seule cas où A est vrai et B est faux (table de vérité)
Implication ouverte (comportant au moins une variable libre)
"si P(x), alors Q(x)"
Elle n'a pas de valeur de vérité
Implication universellement quantifiée
" Pour tout x, si P(x), alors Q(x)"
Elle a une valeur de vérité lorsque le domaine de quantification est précisé
Conditionnel courant (ne concerne pas les éléments pour lesquels l'énoncéIREM de Montpellier 5 mai 2010 19
Implication et déductionIREM de Montpellier 5 mai 2010 20
Une distinction essentielle
Il ne faut pas confondre

- Affirmer une implication « si A, alors B »
- Faire une déduction à partir d'une implication affirmée

 « si A, alors B ; or A ; donc B » (Modus Ponens ou règle du détachement)
 « si A, alors B ; or non B ; donc non B » (Modus Tollens)
Il faut savoir que lorsqu'une implication n'est pas une équivalence, on ne peut pas faire de déduction dans les deux autres cas :
De "si A, alors B » vrai et « B » vrai, on ne peut rien déduire pour A
De "si A, alors B » vrai et « A » faux, on ne peux rien déduire pour BIREM de Montpellier 5 mai 2010 21
Ce sont principalement les implications formelles (énoncés généraux) qui permettent de prouver des résultats que l'on ne connaît pas encore (Russell)
« Pour tout entier n, si la somme de ses chiffres est un multiple de 9, alors il est divisible par 9 ». (1)
On veut savoir si 675 432 684 est divisible par 9, sans faire la division.
On calcul la somme des chiffres ; on trouve 45
45 est un multiple de 9.
Le nombre donné satisfait l'antécédent de l'implication ouverte associée, autrement dit
« La somme des chiffres de 675 432 684 est un multiple de 9 » est une énoncé vrai.
Il peut servir de prémisse pour l'inférence.
On en déduit que « 675 432 684 est divisible par 9 ».IREM de Montpellier 5 mai 2010 22
On attend que ce résultat soit en conformité avec le résultat du calcul : la division effective de ce nombre par 9 produit un quotient entier et un reste nul.
Ceci est le cas.
 On peut le vérifier en faisant l'opération;
 La preuve de l'énoncé (1) dans la théorie mathématique des entiers naturels écrits dans le système de numération décimale de position nous garantit que c'est bien le cas, sans que nous ayons à faire l'opération.
Au collège, les pratiques opératoires stabilisées sur les entiers fournissent des résultats sur lesquels on pourra construire de

nouvelles connaissances, qui en retour enrichiront les techniques de calcul disponibles (c'est en particulier le cas de l'algèbre)

### III.1.1. *Une notion d'implication fondamentale presque jamais convoquée*

Nous avons vu ci-dessus que la difficulté à laquelle s'affronte Russell est celle de la définition de l'implication formelle en relation avec l'implication matérielle. Pour lui, l'implication formelle est la notion fondamentale, mais il ne peut cependant pas la définir sans passer par l'implication matérielle. Dans le moderne calcul des prédicats, ce problème est résolu, grâce à la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, de la manière suivante. Étant donné une implication formelle « $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ », on lui associe la fonction propositionnelle obtenue en supprimant le quantificateur universel, soit « $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » que nous noterons $I$. Une interprétation de $I$ dans un modèle M est une phrase ouverte ; à chaque assignation $a$ d'un objet du domaine à la variable $x$ est associée une implication matérielle « $P(a) \Rightarrow Q(a)$[52] ». L'interprétation de $I$ est satisfaite dans M par $a$ dans trois cas : $P(a)$ et $Q(a)$ sont deux propositions vraies dans M ; $P(a)$ est fausse et $Q(a)$ est vraie ; $P(a)$ est fausse et $Q(a)$ est fausse ; elle est non satisfaite par $a$ lorsque $P(a)$ est vrai et $Q(a)$ est fausse. Et ceci vaut pour tout modèle dans lequel on peut interprété $I$. Nous définissons ainsi « un connecteur du calcul des prédicats » qui est une extension du connecteur propositionnel défini à l'aide des tables de vérité que nous appellerons par la suite *implication ouverte*. Nous verrons dans le paragraphe consacré à la négation que Da Costa (1997) défend une position analogue pour ce qui concerne la négation ce qui montre que cette définition n'est pas « une entre « implication formelle » et « implication matérielle » puisque, conformément à la définition objectuelle du quantificateur universel, l'interprétation de l'implication formelle est vraie dans un modèle donné si chacune des instances de l'implication ouverte correspondante est vraie dans le modèle. Cela a plusieurs conséquences dont l'une, tout à fait essentielle quoique rarement explicitée dans les manuels de mathématiques, est que le pas fondamental de la déduction en mathématique se traduit par « $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ ; or $P(a)$ ; donc $Q(a)$ », où l'on voit bien que l'implication matérielle « $P(a) \Rightarrow Q(a)$ » est sous-entendue et que, pour exprimer cette règle, on doit ici encore considérer un modèle générique, autrement dit un point de vue sémantique. Ceci permet de formaliser le syllogisme paradigmatique « tout homme est mortel ; or Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel »[53], ce qu'il est impossible de faire dans le seul calcul des propositions. De même, c'est ce qui est à l'œuvre lorsque l'on déduit, par exemple, qu'une fonction donnée $f$ de deux variables est différentiable en un point $a$ du fait que ses dérivées partielles sont continues.

Nous pouvons à présent revenir à l'énoncé « si $n$ est pair, alors son successeur est premier ». Cet énoncé est l'interprétation dans un fragment de l'arithmétique de la fonction propositionnelle « $P(x) \Rightarrow Q(s(x))$ » où « $P$ » et « $Q$ » sont interprétées respectivement par « pair » et « premier » et « $s$ » par la fonction « successeur » Il s'agit donc d'une implication ouverte et pour chaque valeur de $x$ compris entre 1 et 20, on obtient une proposition. Le premier tableau montre sur quelques valeurs de $n$ que l'on retrouve la table de vérité de l'implication.

| Valeur assignée à $x$ | $P(x)\Rightarrow Q(s(x))$ | $P(x)$ | $Q(x)$ | $P(x)\Rightarrow Q(s(x))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $P(1) \Rightarrow Q(2)$ | faux | vrai | vrai |
| 3 | $P(3) \Rightarrow Q(4)$ | faux | faux | vrai |
| 4 | $P(4) \Rightarrow Q(5)$ | vrai | vrai | vrai |
| 8 | $P(8) \Rightarrow Q(9)$ | vrai | faux | faux |

Le deuxième tableau illustre l'importance de préciser le domaine de quantification pour pouvoir attribuer une valeur de vérité à un énoncé quantifié dans un modèle donné.

Le deuxième tableau illustre l'importance de préciser le domaine de quantification pour pouvoir attribuer une valeur de vérité à un énoncé quantifié dans un modèle donné.

| Univers du discours $E$ | Ensemble des éléments satisfaisant l'interprétation de $I$ | Valeur de vérité de $\forall x F(x)$ | Valeur de vérité de $\exists x F(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\{x \in N / 1 \leq x \leq 20\}$ | $E/\{8, 14, 20\}$ | Faux | Vrai |
| $\{x \in N / 1 \leq x \leq 7\}$ | $E$ | Vrai | Vrai |
| $\{x \in 2N / 1 \leq x \leq 20\}$ | $\{2,4,6,10,12,16,18\}$ | Faux | Vrai |
| $\{8, 14, 20\}$ | $\varnothing$ | Faux | Faux |

La troisième ligne du tableau montre que la réponse majoritaire des étudiants peut s'interpréter comme le fait de se placer directement dans l'ensemble des entiers pairs pour répondre à la question ; plus généralement ceci reviendrait à considérer que les objets (ou les suites d'objets) d'un modèle pour une implication doivent prioritairement satisfaire