La proportionnalité inverse

Introduction : lettre du marquis de Condorcet au comte Verri

Le comte Pietro Verri (1728-1797), aristocrate milanais, homme des Lumières, épris d'action autant que de réflexion, fait paraître en 1771 un maître ouvrage d'économie politique qui en fait un précurseur de la révolution marginaliste. Lorsqu'il lit cet opus, Condorcet (1743-1794) prend sa plume et adresse à l'auteur l'observation que voici.

> *Pardonnez, Monsieur, si un géomètre a osé vous faire une observation sur un endroit de votre livre où vous employez le langage de la géométrie. Vous dites que le prix est en raison inverse du nombre des vendeurs, et en raison directe de celui des acheteurs. Je sais bien que le prix augmente quand le nombre des acheteurs augmente, et qu'il diminue quand celui des vendeurs s'accroît ; mais est-ce le même rapport ? C'est ce que je ne crois pas. Ainsi le langage géométrique dans ce cas, et dans tous les autres de cette espèce, bien loin de conduire à des idées plus précises, me semble induire en erreur ; on se dit que l'auteur se serait contenté du langage ordinaire, s'il n'avait pas entendu parler d'une proposition rigoureusement exacte.*

1. Définition

On dit que deux grandeurs x et y sont **inversement proportionnelles** si y est proportionnelle à l'inverse de x $\left(\frac{1}{x}\right)$ c'est-à-dire s'il existe un nombre k tel que $y = \frac{k}{x}$ ou $xy = k$.

2. Exemple

$\boldsymbol{x}$	1	2	3
$\boldsymbol{y}$	12	6	4

On a :

$1 \times 12 = 12$ ou $12 = 12 \times \frac{1}{1}$

$2 \times 6 = 12$ ou $6 = 12 \times \frac{1}{2}$

$3 \times 4 = 12$ ou $4 = 12 \times \frac{1}{3}$

On a la relation $y = \frac{12}{x}$ (relation fonctionnelle ; cf. plus loin).

Par conséquent, x et y sont inversement proportionnelles.

Méthode :

Pour savoir si un tableau est un tableau d'inverse proportionnalité, on calcule les produits obtenus en multipliant la case du « haut » par la case du « bas ».

3. Contre-exemple

x	2	4	8
y	5	10	20

Ici, il s'agit d'un tableau de proportionnalité directe avec $y = 2{,}5x$.

4. Applications physiques

• **Loi de Mariotte**

Pour un gaz parfait à température constante, on a PV = constante avec P : pression et V : volume.

P et V sont inversement proportionnelles.

• Sur le même modèle, on a également la **loi de Wien**.

$\lambda_{max} \times T = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m.K avec λ : longueur d'onde principalement émise par le corps en mètres (m)
T : température du corps en Kelvin (K) (T = θ + 273,15)

• **Remarque**

Lorsque deux grandeurs physiques sont proportionnelles (directement ou inversement), cela est valide en général sur une plage de valeurs et non sur toutes les valeurs.
On a par exemple le cas du ressort où l'allongement est proportionnel à la masse pour des valeurs de la masse ne dépassant pas un certain seuil.

5. Modélisation

On modélise la proportionnalité directe ou inverse par des fonctions (sous-jacente derrière les relations fonctionnelles).

• Si x et y sont deux grandeurs directement proportionnelles, alors on peut modéliser la situation par une fonction linéaire $f : x \mapsto kx$.

• Si x et y sont deux grandeurs inversement proportionnelles, alors on peut modéliser la situation par une fonction associée à la fonction « inverse » $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$.

Conséquence :

On revient à la lettre de Condorcet au comte Verri.

x et y sont deux nombres tels que $x > 0$, $y > 0$, $xy = k$ avec $k > 0$ fixé.

• Si x augmente alors y diminue.

• Si x diminue alors y augmente.

Cela motive le cours sur la fonction « inverse » vu en seconde.