Les mathématiques grecques

Généralités

La connaissance des mathématiques grecques

Elle pose des problèmes de source. Hormis quelques fragments de papyri alexandrins, nous ne disposons pas de manuscrits originaux. Les textes grecs nous sont parvenus sous forme de copies dont l'authenticité n'est pas garantie, de commentaires rédigés entre 500 et 1500 ans après les originaux, de traductions arabes et de versions latines.

En contact avec les peuples orientaux, Babylone et Égypte, les Grecs ne se contentent pas d'assimiler leurs connaissances, mais rendent les mathématiques abstraites et déductives. Les Grecs sont avant tout des géomètres. Recherche mathématique et spéculation philosophique sont étroitement liées dans la Grèce antique.

La logistique grecque

C'est l'art de compter, par opposition à l'arithmétique réservée à la théorie des nombres et elle est très compliquée.

Une inscription datant de – 450 témoigne de l'usage à Athènes du système attique de numération, système additif à base 10 qui comprend neuf symboles : I, II, III et IIII pour les quatre premiers chiffres, puis les lettres initiales Γ de *penta* (5), Δ de *deka* (10), H de *hekaton* (100), X de *chilioi* (1000) et M de *myrioi* (myriade) pour 10 000. Les autres nombres sont notés en formant des combinaisons des neuf symboles ci-dessus.

Il a été progressivement remplacé par le système ionique. Son utilisation s'est généralisée à Alexandrie dès le III^e^ siècle avant J.-C.. C'est un système décimal de numération alphabétique additif, non positionnel, formé des 24 lettres de l'alphabet grec plus 3 autres signes. Dans les papyri alexandrins apparaît un symbole pour le zéro.

Le système grec se prête difficilement à l'écriture des fractions. Il existait un symbole pour $\frac{1}{2}$. Comme les Égyptiens, les Grecs furent tentés de n'utiliser que des fractions unitaires.
Le système grec de numération étant trop compliqué pour effectuer facilement des opérations par écrit, celles-ci le sont fréquemment sur un abaque, table sur laquelle des lignes parallèles figurent les unités, les dizaines, les centaines etc. L'abaque sera largement utilisé par les Romains et dans l'Occident médiéval chrétien, même après l'introduction de la numération décimale de position qui est la nôtre.

Les problématiques grecques

La quadrature du cercle

On englobe généralement sous le vocable "quadrature du cercle" deux problèmes très voisins, mais cependant distincts. Le premier consiste à trouver un carré de même aire qu'un disque donné : c'est le problème de la quadrature proprement dite. La construction du carré devra ou pourra être effectuée au moyen de tel ou tel instrument autorisé. Le second problème est celui de la rectification de la circonférence d'un cercle : calcul ou tracé d'un segment de même longueur que cette circonférence.

Le problème a été étudié aux V^{e} et IV^{e} siècles avant J.-C. et il nous reste à ce sujet les noms d'Anaxagore (– 500 ; – 428), qui s'en serait occupé dans sa prison, d'Antiphon et de Bryson, que critique Aristote et qui auraient procédé, d'une façon encore rudimentaire, comme Euclide ou Archimède. Enfin Hippocrate de Chio aborde le problème à la même époque.

Les géomètres grecs considérant la droite et le cercle comme figures fondamentales n'envisagent en général que des problèmes susceptibles d'être résolus à la règle et au compas. Les trois problèmes évoqués (quadrature du cercle, trisection de l'angle et duplication du cube) échappent à cette restriction, et c'est bien pour cela qu'ils ont résisté si longtemps à toutes les tentatives de résolution si bien que la quadrature du cercle est devenue synonyme d'impossibilité. Elle revient à la recherche de la valeur de π.

Les Grecs ne se contentent pas de trouver des valeurs approximatives de π : bien qu'Archimède donne une méthode qui consiste à approcher π : par des encadrements de plus en plus serrés, mais essaient d'arriver à la construction du carré équivalent. Jusqu'au XVII^{e} siècle, la méthode d'Archimède servira de modèle pour le calcul expérimental de π.

La trisection de l'angle

Les origines du problème de la trisection de l'angle (partage d'un angle en trois angles adjacents de même mesure) sont obscures. On est en présence d'un nombre très simple : $\frac{1}{3}$. Comme la trisection de l'angle droit est très facile, l'angle de 30° pouvant se construire à la règle et/ou au compas (suivant des constructions planes, disaient les Grecs), et comme, d'autre part, un angle obtus se décompose en un angle droit et un aigu, le problème peut toujours se ramener au seul cas de l'angle aigu.

On fait remonter à Hippias d'Élis, qui vivait à la fin du V^{e} siècle avant J.-C., une première solution du problème. Il construit à cet effet une courbe, qui porte le nom de quadratrice. La courbe permet la trisection de l'angle et même sa division dans tout rapport donné.

La duplication du cube ou le problème de Délos

Selon Eutocius (commentateur hellénistique de la fin du V^{e} siècle et du début du VI^{e}), ce problème aurait une origine légendaire.
En effet, Apollon aurait, par la bouche de l'oracle de Délos, ordonné qu'on double (le volume d') un des autels de son sanctuaire. Les habitants de Délos sont alors confrontés au problème de trouver l'arête x d'un cube dont le volume serait le double d'un cube de côté a donné, ce qui revient à résoudre l'équation $x^3 = 2a^3$, ou trouver la racine cubique de 2.

Hippocrate de Chio trouva le premier une solution. Peut-être les Pythagoriciens l'avaient-ils déjà trouvée.
Héron d'Alexandrie y a également contribué.
En tout cas, les Grecs du III^{e} siècle avant J.-C., et probablement ceux du IV^{e}, peut-être du V^{e}, avaient apporté une première réponse précise au problème de la duplication du cube : le côté du cube et celui du cube double ne sont pas commensurables entre eux.

L'impossibilité de résoudre le problème de Délos à la règle et au compas, pressentie pendant des siècles, n'a pu être établie qu'au XIX^{e} siècle.

Les mathématiciens grecs

Thalès (environs de – 620, – 550)

C'est le premier mathématicien dont on connaisse le nom. Savant, philosophe et physicien, Thalès de Milet crée l'école d'Ionie. Il fait partie de sept sages de la Grèce. Pour lui, l'élément premier est l'eau qui est la base de toute chose. Il doit sa célébrité à la prédiction d'une éclipse de soleil (sans doute celle de 585 avant J.-C. conformément à Pline). Il fut l'un des premiers à décrire le phénomène électrique.

Aristote nous montre Thalès sous l'aspect d'un spéculateur habile, trustant les moulins à huile de la contrée et une autre tradition nous le décrit bon ingénieur, détournant le cours d'une rivière pour permettre l'établissement d'un gué.

Il aurait, dit-on, émerveillé le pharaon lui-même en calculant la hauteur des pyramides au moyen de leur ombre mais le papyrus de Rhind déjà (2000 ans avant J.-C.) contient des problèmes analogues. Notre théorème de Thalès ne doit rien au vieux philosophe. Il était d'ailleurs accepté comme une évidence par les Égyptiens et les Babyloniens. Gardons le nom de théorème de Thalès comme un hommage à un des plus anciens savants connus et rappelons-nous d'ailleurs que cette appellation est très récente.

Pythagore

D'une génération plus jeune que celle de Thalès, il semble appartenir à la seconde moitié du VI^{e} siècle avant J.-C. Né à Samos, on admet parfois qu'il fut le disciple de Thalès et de son élève Anaximandre. Il se fixe dans la Grande Grèce (l'Italie du Sud) où il fonde une secte qui, à des tendances aristocratiques, joignait un caractère mystique et religieux. Les adeptes vivaient en commun, pratiquant la communauté des biens et s'abstenant de certains mets (fèves et viande par exemple) car ils croyaient en la métempsychose. Ils se distinguèrent surtout dans le domaine scientifique, et comme les disciples rapportaient toutes leurs découvertes au maître, il est devenu à peu près impossible de distinguer les siennes propres et les leurs.

Ils ont beaucoup étudié l'arithmétique, définissant des nombres associés aux formes géométriques, et la géométrie, portant sur des solides dits de Platon associés comme figures cosmiques aux éléments eau, air, terre, air et à Dieu.
La secte pythagoricienne adopta comme signe de reconnaissance le pentagone étoilé ou étoile à cinq branches.
On lui attribue aussi la découverte des grandeurs incommensurables, comme le côté d'un carré et sa diagonale ainsi que le célèbre théorème de Pythagore, utilisable dans le triangle rectangle et qui, en fait, aurait été pressenti par les Babyloniens.
Pythagore découvrit également la relation qui existe entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur de la note émise.

Zénon

Né entre – 495 et – 480, Zénon d'Élée formule quatre paradoxes illustrant l'impossible existence d'une matière divisible à l'infini et l'impossibilité de tout mouvement si l'espace et le temps sont composés de parties indivisibles.
En effet, dans la deuxième moitié du V^{e} siècle avant J.-C., deux concepts s'opposaient : la conception continuiste pensait le nombre, l'espace, le temps et la matière comme divisibles à l'infini, tandis que la conception atomiste préconisait l'existence d'éléments premiers indivisibles.
Les arguments de Zénon sont des "apories" (impasses) ; ils tentent d'établir que, dans les deux hypothèses, on aboutit à une impasse.

Celui d'Achille et la tortue est peut-être le plus connu. Achille faisant la course avec la tortue se montre beau joueur et accorde une avance à la tortue. Pendant qu'il parcourt la distance qui le sépare du point de départ de la tortue, cette dernière avance à son tour ; l'écart entre Achille et la tortue se réduit, certes, mais la tortue conserve l'avantage. Alors qu'Achille couvre la nouvelle distance qui le sépare de la tortue, la tortue avance elle aussi, etc. Si l'espace est divisible à l'infini, Achille ne pourra jamais rattraper la tortue. Ce qui est en jeu dans ce paradoxe, c'est la difficulté de concevoir que la somme d'une infinité de quantités de plus en plus petites puisse être égale à une grandeur finie.

L'académie de Platon

"Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre"

Philosophe, Platon vit au centre d'un grand mouvement mathématique et se présente comme un animateur de cette science renouvelée.
En effet, les mathématiques jouent d'abord chez Platon un rôle pédagogique pour la formation des philosophes ; il s'agit de former des caractères, "de les faire monter à la lumière" comme certains héros sont montés, dit-on, de l'Hadès chez les Dieux. Il est symptomatique qu'une description du rôle des mathématiques soit donnée dans un texte d'organisation politique, "la République". Cela nous vaut une description magistrale des mathématiques et de l'astronomie, envisagées dans leur devenir. Le philosophe ne se contente pas de décrire, il indique des voies à suivre pour le développement mathématique et il critique le chemin parcouru : c'est une démarche épistémologique.

Démocrite (– 460, – 370)

On sait, d'après Archimède, que Démocrite, philosophe atomiste, aurait été le premier en Grèce à affirmer que le volume de la pyramide est le tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur. Tous ses écrits sont malheureusement perdus et on ne connaît de sa pensée que ce qu'en ont rapportée d'autres penseurs du monde grec, en particulier Aristote et Plutarque.

Eudoxe (aux environs de – 400, – 355)

II a vécu à Cnide, fut médecin et célèbre surtout comme astronome et mathématicien.
D'après Archimède, il est le premier à avoir découvert la démonstration du calcul du volume du cône et de celui de la pyramide. Son raisonnement utilise une méthode "infinitésimale".
On attribue parfois à son école la paternité du livre V des *Éléments* d'Euclide où la théorie des rapports exposée est très subtile.

Aristote (– 384, – 322)

C’est l’élève le plus célèbre de Platon. Après sa mort, il devient le précepteur d’Alexandre le Grand puis revient à Athènes pour y créer son école, qu’il installe dans le gymnase attenant au Lycée, temple d’Apollon Lykeios.
Il s’intéresse surtout à la nature des mathématiques et à leur lien avec le monde réel. Il distingue les définitions, les axiomes et les hypothèses et soulève le problème de l’existence des objets définis : pour lui, l’existence d'un objet mathématique est établie si on arrive à le construire.

"Savoir, c’est connaître par le moyen de la démonstration"
Il devient le fondateur de la logique et est à l’origine de la séparation de la science en disciplines distinctes. Il réfléchit sur l’infini et pense que le point est indivisible, donc qu’un ensemble de points ne pourra jamais former une ligne continue.

Euclide (– 315, – 255)

Il enseigne les mathématiques à Alexandrie, où il a fondé la plus célèbre école de l’antiquité.

Son œuvre est constituée de 13 livres qui ont servi de modèles aux savants les plus illustres pendant longtemps : 6 volumes de géométrie plane, 3 de géométrie dans l’espace et 4 d’arithmétique.
Il établit que la somme des angles dans un triangle est égale à 180° et énonce son célèbre axiome (ou postulat). Il étudie la puissance visuelle de l’œil et les propriétés des miroirs plans. Nous lui devons le principe de la division euclidienne et du calcul du plus grand commun diviseur à deux nombres. Il assimile la terre à une boule. Il fournit une démonstration du théorème de Thalès et de celui de Pythagore, utilisant les aires. Il démontre l’incommensurabilité de la diagonale du carré à son côté.

Archimède (– 287, – 217)

"Qui Archimède et Apollonium intellegit, recentorium summorum vivorum inventa parcius mirabitur" (Leibniz)
À qui comprend Archimède et Apollonius, les plus grandes inventions des modernes apportent peu d’étonnement.

Né à Syracuse, en Sicile, suivant le rapport de Plutarque, il aurait été parent du roi Hiéron. Il s’occupa plus particulièrement de géométrie et de mécanique. Il était si passionné par les sciences qu’il en oubliait, dit-on, de boire et de manger. Il regardait la pratique comme une vile esclave de la théorie et ceci nous a privés d’une foule d’inventions dont il ne reste plus aucune trace.
Le principe d’Archimède, déclarant que "le volume d’un corps plongé dans l’eau est égal au volume de la quantité d’eau déplacée", porte encore son nom. On lui attribue l’invention de la roue dentée, de la vis sans fin, de la poulie mobile et la théorie du levier : "un seul point d’appui suffit pour soulever le monde".
Il fut le premier à donner une méthode permettant d’obtenir une valeur approchée du nombre π en construisant des polygones se rapprochant de plus en plus du cercle de rayon 1. Il fut le premier à calculer certaines aires (cylindre, sphère, "segment" de parabole).
Lors du siège de Syracuse et de l’attaque par les Romains, il fit construire des catapultes et enflammait les vaisseaux au moyen de miroirs.
À la fin de sa vie, étudiant un problème, il ne voulut pas répondre à un soldat. Ce dernier, pris de rage, le transperça d’une lance. Sur son tombeau, est gravée une sphère inscrite dans un cylindre.

Dioclès (IIe siècle avant J.-C.)

À la suite de plusieurs mathématiciens, il utilisa une courbe dite cissoïde (à laquelle son nom est resté attaché) pour résoudre, au delà du seul usage de la règle et du compas, la duplication du cube.

Nicomède (IIe siècle avant J.-C.)

On sait seulement qu’il inventa une courbe dite conchoïde (à laquelle son nom est resté attaché) pour résoudre les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l’angle.

Ératosthène (– 284, – 192)

À Alexandrie, Ératosthène s'occupe de l'éducation du fils du souverain Ptolémée III.
Il était mathématicien, astronome, poète, historien, géographe, athlète et bibliothécaire.
Il détermine la méthode pour trouver les nombres premiers (qui ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes : 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...) grâce à son "crible".
Il calcule la mesure du rayon de la terre en effectuant des mesures à Assouan et à Alexandrie.

Hippocrate

Il a vécu à Chio, dans la seconde moitié du II^{e} siècle avant J.-C..
Pour Aristote, il est le type de personnage compétent en géométrie et malhabile ailleurs. Selon Proclus, il serait l'inventeur de la méthode des moyennes proportionnelles pour la duplication du cube, ce qui prouverait la mise au point d'une approche originale des problèmes de géométrie. Il est aussi connu pour sa quadrature des lunules.

Appolonius

Les documents sur sa vie sont presque aussi rares que ceux qui concernent Euclide.
Il est présumé avoir eu sa plus grande activité scientifique en 170 environ avant notre ère. Né à Perge, en Pamphylie, il séjourne à Alexandrie et à Pergame.
Son ouvrage principal est le traité des sections coniques. C'est l'inventeur des noms actuels des coniques : ellipse, parabole et hyperbole (qui pour lui ne signifie qu'une des deux branches). Chez Archimède, les trois coniques s'appelaient section du cône droit, section du cône aigu et section du cône obtus.
D'autres ouvrages, perdus, ne nous sont connus que par les commentaires qu'en donne Pappus.

Héron

C'est un ingénieur, vivant à Alexandrie, sur la vie duquel on ne sait pratiquement rien, et dont l'œuvre est cependant considérable. On pense actuellement qu'il vivait au premier siècle de notre ère.
Le texte "les Métriques" a été retrouvé en 1896 à Constantinople, dans un manuscrit du XI^{e} ou XII^{e} siècle. C'est un ouvrage de géodésie, au sens grec du terme, c'est-à-dire de géométrie appliquée. Il calcule des longueurs, des aires et des volumes.
Il a laissé des traités d'optique, de physique et de mécanique. Il étudie des valeurs approchées de racines carrées, de racines cubiques et l'insertion de deux moyennes proportionnelles dans une proportion.

Menelaüs

Il fit des observations astronomiques sous l'empereur Trajan à Rome, à la fin du premier siècle de notre ère.
Les trois livres sur la sphère contiennent en particulier le célèbre théorème qui lui survit, applicable dans le plan ou sur la sphère.

Ptolémée (Claude)

Né en Égypte, il exerça sous les règnes d'Adrien et d'Antonin ses talents d'astronome, observant une éclipse de lune en l'an 125 de notre ère et quelques étoiles en 139. Il fait la communication entre l'astronomie ancienne et moderne.
Son livre, "l'Almageste", est le monument le mieux observé de la trigonométrie grecque. On y trouve des tables donnant les longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ce qui équivaut à dresser des tables de sinus.
Ce mot, tiré du grec, et qui signifie "mesure des triangles", n'est pas lui-même un mot grec car cette partie des mathématiques n'a trouvé son nom qu'à l'aube du XVII^{e} siècle.

Diophante

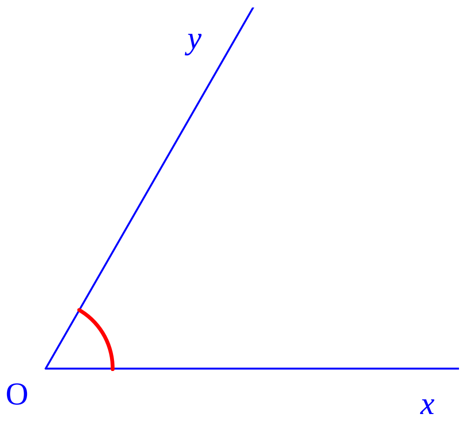
Personnage énigmatique, il vécut à Alexandrie et son rôle est de premier plan dans l'histoire de l'algèbre. On pense actuellement qu'il a vécu aux environs de 250 de notre ère.
Nous avons conservé un problème qui se rapporte à la durée de sa vie : "Passant, c'est ici le tombeau de Diophante ; c'est lui qui, par cette étonnante disposition, t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu. Sa jeunesse en a occupé la sixième partie ; puis sa joue se couvrit d'un premier duvet pendant le douzième. Il passa encore le septième de sa vie avant de perdre une épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père fut obligé de lui survivre, en le pleurant, pendant quatre années. De tout ceci, déduis son âge. "

Son grand ouvrage est composé de treize livres d'arithmétique. Si, chez les Grecs de la grande période n'existait aucun symbolisme, chaque raisonnement étant écrit en toutes lettres, avec Diophante on voit apparaître un certain nombre d'abréviations. Ainsi, la soustraction était notée ψ, l'inconnue ζ, son carré par Δ^{γ} et son cube par K^{γ}. Il propose des énoncés de problèmes nécessitant des équations, les seuls nombres acceptables étant, comme chez tous les Grecs, des nombres entiers ou fractionnaires.

Référence : *Le début des mathématiques grecques.* Vrin CNRS 1977 (épuisé)

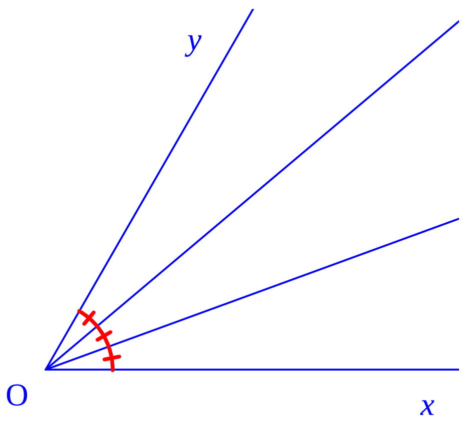
Explication sur la trissection de l'angle

On se donne un angle $\widehat{xOy}$ dont on ne connaît pas la mesure.

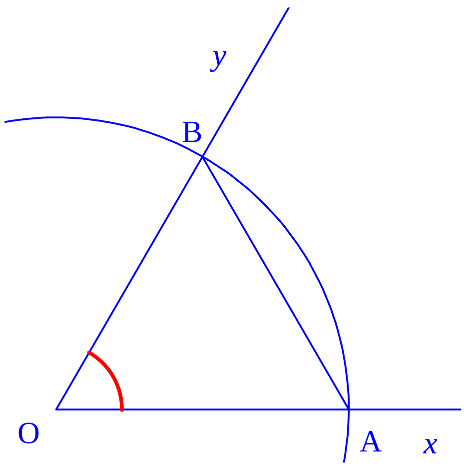


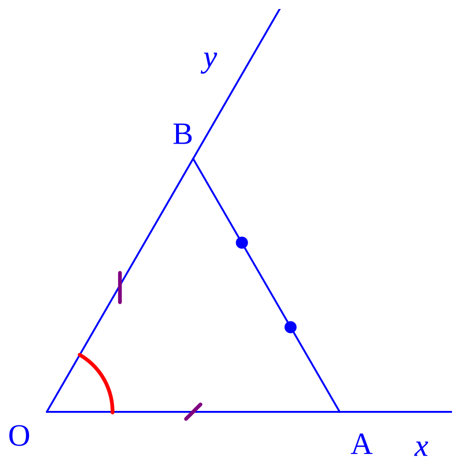
On connaît la construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle c'est-à-dire de la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

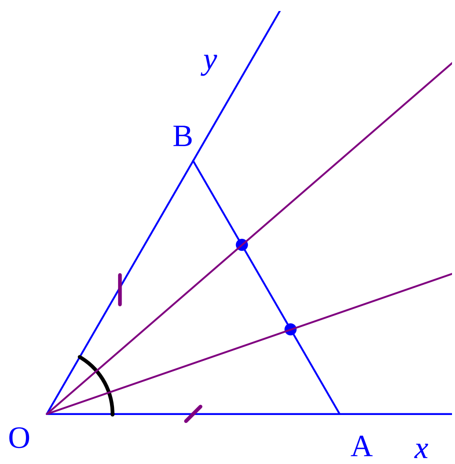
On désire partager cet angle en trois angles de même mesure.
Autrement dit, on veut construire à la règle et au compas des demi-droites qui partagent l'angle en trois angles de même mesure comme l'illustre la figure ci-dessous. On appellera ces demi-droites des trissectrices.



Une méthode naïve consiste à s'inspirer d'une méthode analogue pour la bissectrice.
On trace le segment joignant deux points A et B situés respectivement sur les demi-droites [O*x*) et [O*y*) tels que l'on ait : OA = OB.
Puis on partage le segment en trois (construction que l'on peut facilement à effectuer à la règle et au compas) et à joindre les points obtenus au point O.







On peut vérifier sur quelques exemples que cette méthode est fausse (en effectuant des mesures au rapporteur ou des pliages).

En fait, on sait démontrer que la construction à la règle et au compas des trissectrices est impossible.
Par contre, il existe une méthode par pliage qui permet, comme pour la bissectrice, d'obtenir les trissectrices (et même de partager cet angle en *n* angles de même mesure).