Devoir d'approfondissement

I. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système d'équations $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$.

II. Équations du 3e degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

Soit p et q deux réels fixés.
On se propose de résoudre l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1) d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

1°) On pose $x = u + v$ et on impose à u et v la condition $uv = -\dfrac{p}{3}$.

Démontrer que la résolution de (1) conduit à la résolution dans $\mathbb{C}^2$ du système : $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ uv \in \mathbb{R} \end{cases}$.

Former l'équation (2) dont les racines sont u^3 et v^3.

2°) **Applications**

Employer cette méthode pour résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$x^3 + 12x + 63 = 0$; $x^3 - 12x - 16 = 0$; $x^3 - 12x + 8\sqrt{2} = 0$.

3°) **Étude théorique**

On discute de la réalité des racines de (2).

a) On suppose que $4p^3 + 27q^2 > 0$.
Démontrer que les racines sont de (1) sont $u_0 + v_0$, $ju_0 + j^2 v_0$, $j^2 u_0 + jv_0$ si on désigne par $u_0{}^3$ et $v_0{}^3$ les racines de (2) ($(u_0 ; v_0) \in \mathbb{R}^2$).

On rappelle que $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

b) On suppose que $4p^3 + 27q^2 = 0$.
Déterminer les racines de (1).

c) On suppose que $4p^3 + 27q^2 < 0$. On pose $u = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ lorsque u est racine de (2).
Exprimer les racines de (1) en fonction de ρ et θ.

4°) Discuter suivant les valeurs de p et q la réalité des racines de (1).
Retrouver la formule de Cardan.