

Pour répondre aux questions sur le comportement des suites, on pourra commencer par **tabuler** la suite sur calculatrice ;

1 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n}{n+1}$.

1°) Recopier et compléter la phrase : « On peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ ».

2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

Utiliser cette égalité pour justifier brièvement le résultat de la question 1°).

Dans les exercices suivants, pour répondre aux questions sur le comportement des suites, on pourra :

- commencer par **tabuler** la suite sur calculatrice ;

- utiliser l'**écriture symbolique** de la limite d'une suite (en rédigeant ainsi : « On peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$ »).

2 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

3 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = (0,6)^n$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$.

On pourra utiliser un programme (ne pas détailler l'écriture du programme).

4 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$.

5 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^3 - n$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

6 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

7 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 5 - n^2$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

8 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

9 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 9$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right).$$

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

10 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

1°) Tabuler et représenter la suite (u_n) sur la calculatrice.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ (on pourra utiliser un programme).

11 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction

$f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ (prendre un centimètre pour unité graphique).

Effectuer la construction itérative des termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2°) Que peut-on penser du sens de variation de la suite (u_n) et de son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

3°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 2$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$.

12 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Tabuler la suite (u_n) sur la calculatrice.

Comparer les valeurs de u_n avec les premières décimales du nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Remarque : Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé « **nombre d'or** ».

13 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \sqrt[n]{2}$ (u_n est la **racine n -ième** de 2 ; on peut aussi écrire $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$ qui est une notation en exposant fractionnaire).

Tabuler la suite (u_n) sur la calculatrice.

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

14 Soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon 1.

On inscrit dans ce cercle un polygone régulier \mathcal{P}_n à n côtés (avec $n \geq 4$).

1°) Soit A et B deux sommets consécutifs du polygone.

Exprimer la mesure en radians de l'angle \widehat{AOB} en fonction de n .

2°) Démontrer que l'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$; en déduire l'aire \mathcal{A}_n du polygone \mathcal{P}_n .

3°) À l'aide de la calculatrice, étudier le comportement de \mathcal{P}_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pouvait-on prévoir le résultat ?

15 Le premier jour de propagation d'une épidémie sur une population de 1 500 personnes, 90 personnes ont été contaminées. Ensuite, le nombre de nouvelles personnes contaminées diminue chaque jour de 10 %. On désire étudier l'évolution de cette épidémie.

1°) Pour chaque entier naturel $n \geq 1$, on note u_n le nombre de personnes contaminées le jour n . Ainsi $u_1 = 90$.

a) Étudier la nature de la suite (u_n) . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de jours on peut considérer que l'épidémie est stoppée, c'est-à-dire qu'il y a moins d'une personne contaminée par jour.

2°) On s'intéresse au nombre S_n de personnes contaminées au total depuis le premier jour jusqu'au jour n .

a) Exprimer S_n en fonction de n .

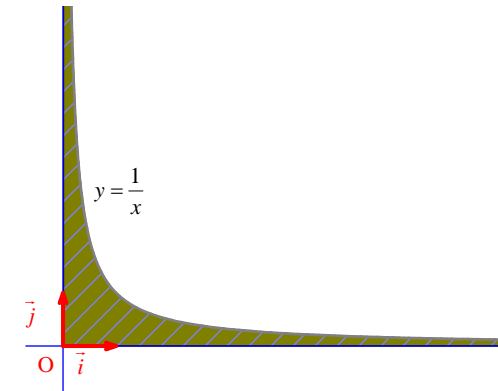
b) Vers quelle valeur semble tendre le nombre total de personnes contaminées lorsque le nombre de jours devient « grand » ?

c) Quel pourcentage de la population sera contaminé par la grippe ?

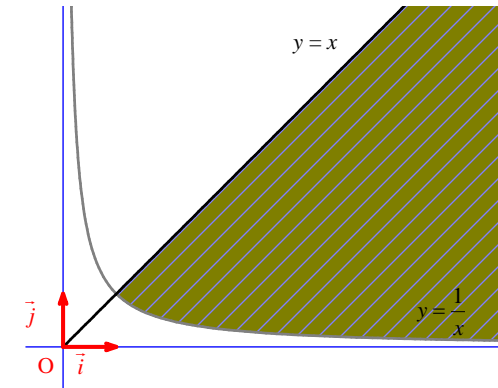
Dans les exercices **16** à **21**, les points de la représentation graphique de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* sont situés dans la partie hachurée du plan.

Indiquer dans chaque cas si (u_n) est obligatoirement convergente (indiquer alors la limite), obligatoirement divergente (préciser alors le comportement) ou si plusieurs cas sont possibles (sans chercher à justifier).

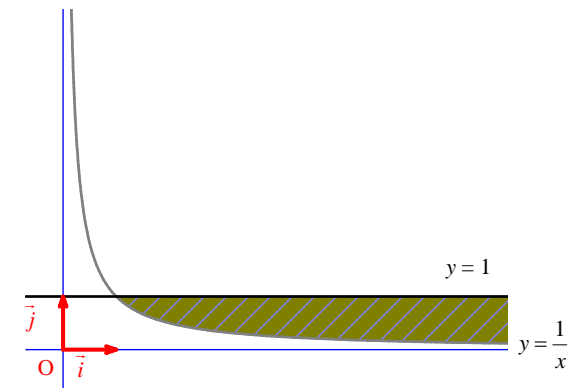
16 Graphique



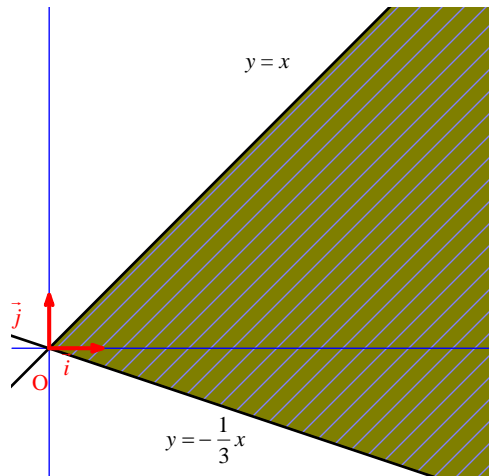
17 Graphique



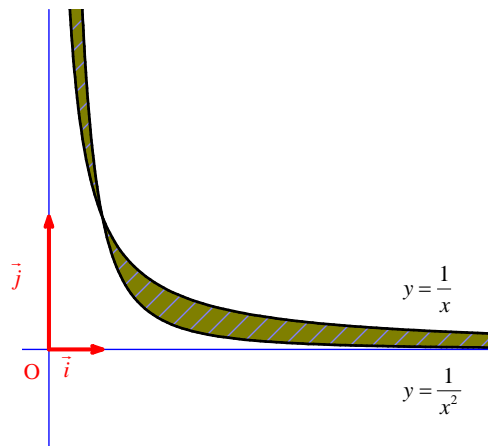
18 Graphique



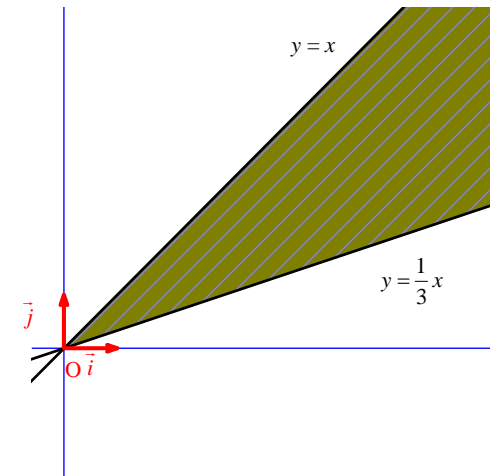
19 Graphique



20 Graphique



21 Graphique



22 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Faire des essais sur la calculatrice pour plusieurs valeurs de u_0 .

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

23 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \sqrt{n+2}$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$.

24 On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 + 3n + 1$.

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) Avec un logiciel de calcul formel, on a rentré la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ résolu un certain nombre d'inéquations.

Dans le tableau ci-dessous, on donne dans la colonne de gauche les inéquations et dans la colonne de droite les réponses fournies par le logiciel.

$f(x) \geq 1\ 000$	$x \geq 30,1425346646$
$f(x) \geq 10\ 000$	$x \geq 98,506498047$
$f(x) \geq 100\ 000$	$x \geq 998,500625$

Utiliser ces résultats pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

• $u_n \geq 1\ 000$

• $u_n \geq 10\ 000$

• $u_n \geq 100\ 000$

Recopier et compléter alors les phrases suivantes :

- Si $n \geq \dots$, alors $u_n \geq 1\ 000$.
- Si $n \geq \dots$, alors $u_n \geq 10\ 000$.
- Si $n \geq \dots$, alors $u_n \geq 100\ 000$.

25 Dans une kermesse, un organisateur de jeux dispose d'une roue comportant 20 cases : 18 cases noires et 2 cases rouges.

Lors du lancer de la roue, toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

Le joueur décide de lancer la roue n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1).

1°) Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'il obtienne au moins une fois une case rouge.

2°) Que peut-on penser de la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Donner une interprétation concrète de ce résultat.

26 Pour réduire les inégalités entre salariés, une entreprise propose que, pour ses salariés de catégorie B gagnant 2000 € par mois, on augmente les salaires de 2 % par an, alors que pour ceux de la catégorie C gagnant 1500 € par mois, on augmente les salaires de 5 % par an, jusqu'à ce que les salaires des deux catégories s'équilibrent.

On note (B_n) et (C_n) les suites des salaires annuels de chaque catégorie.

Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \frac{C_n}{B_n}$.

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la suite (U_n) .

2°) Justifier qu'il existe un entier naturel n tel que $U_n > 1$.

En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que $C_n > B_n$.

Déterminer à l'aide de la calculatrice l'année où C_n deviendrait supérieur à B_n .

3°) Pour que les salariés de la catégorie C rattrapent en seulement 6 ans l'écart de salaire, quel taux d'augmentation devrait-on leur proposer ?

27 Aire sous la parabole

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$.

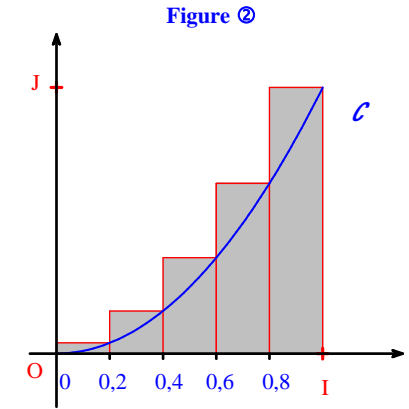
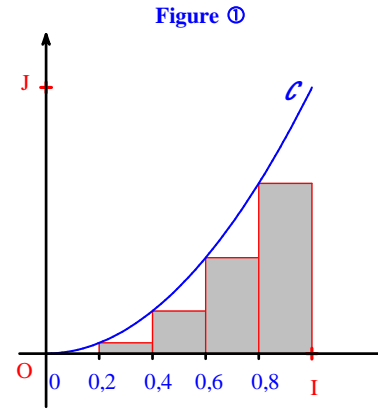
On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On note \mathcal{A} l'aire du domaine D situé entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

On se propose de déterminer une valeur approchée de \mathcal{A} .

1°) Avec cinq intervalles

On subdivise $[0 ; 1]$ en cinq intervalles de même longueur et construit les figures suivantes.



- Calculer la somme des aires des rectangles contenus dans D (figure ①).
- Calculer la somme des aires des rectangles qui contiennent D (figure ②).
- En déduire un encadrement de \mathcal{A} .

2°) Avec n subdivisions

On subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) de même longueur $\frac{1}{n}$.

On construit comme ci-dessus n rectangles qui sont contenus dans D et n rectangles qui contiennent D .

a) Démontrer que la somme des aires des rectangles contenus dans D est donnée par

$$A_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3}$$

et que la somme des aires des rectangles qui contiennent D est donnée par $B_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

b) On rappelle la formule sommatoire : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donner des expressions simplifiées de A_n et B_n .

c) Déterminer le rang n à partir duquel on a : $B_n - A_n \leq 10^{-6}$.

d) En déduire un encadrement de \mathcal{A} d'amplitude inférieure à 10^{-6} .

Corrigé

Dans tous les exercices, on s'intéresse au **comportement asymptotique** d'une suite.
On s'intéressera accessoirement au **comportement global** de la suite (monotonie, majoration, minoration...).

Les exercices de ce chapitre reposent sur des **constatations numériques et graphiques** (conjectures).

Les suites sont définies soit en **mode explicite** soit en **mode récurent**.

L'utilisation de la calculatrice ou d'un tableur permet de calculer les termes et de faire les graphiques en « nuages de points » (points non reliés).

Le tableur offre une meilleure visibilité des résultats qu'une calculatrice.

Lorsque la suite est définie en mode explicite, la détermination de **valeurs seuils** peut être effectuée :

- par **essais successifs** (tâtonnements)
- par **programmation** (algorithme avec boucle « Tantque »)
- en utilisant un **logiciel de calcul formel** (rapide et efficace)

Les exercices portent sur la convergence ou de la divergence de suites.

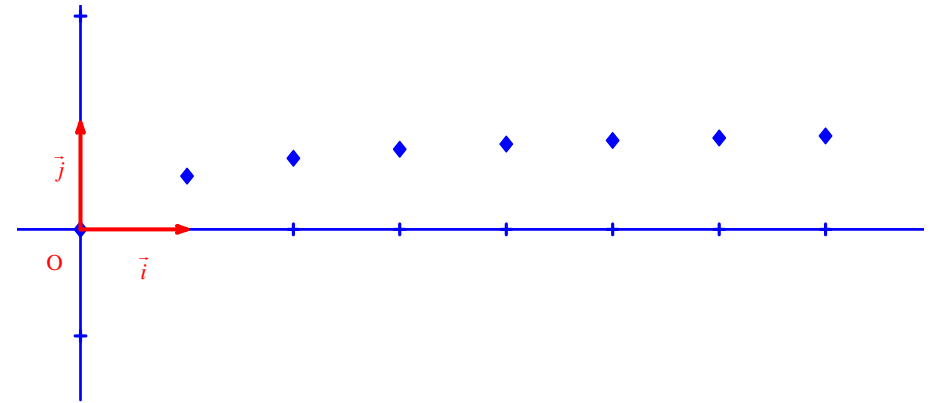
Lorsqu'une suite converge, il est intéressant de pouvoir apprécier la **vitesse de convergence** (rapidité de convergence).

Dans ce chapitre, il n'y a pas de propriétés (à part les quelques limites de référence qui sont données à la fin du cours). On s'appuie principalement sur l'intuition.

$$\boxed{1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

La suite (u_n) est définie en mode explicite.

La suite est représentée par le nuage de points suivant.
Il s'agit de points isolés (non reliés).



On pourrait aussi tracer la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ puis sélectionner les points de \mathcal{C} dont l'abscisse est un entier naturel.

Il est intéressant de faire apparaître la « barre de 1 » (droite horizontale d'équation $y = 1$, « asymptote horizontale » en $+\infty$).

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$**

- On s'appuie sur l'observation du tableau de valeurs obtenu sur la calculatrice et éventuellement sur la représentation graphique de la suite sous forme d'un nuage de points.
- Dans cette question, on ne justifie pas : on donne le comportement asymptotique sans justifier (en utilisant une formulation de la forme : « On peut penser que ... »).

Dans cet exercice, on utilise directement la notation symbolique pour donner la phrase réponse.

Il y a plusieurs formulations et notations possibles :

- On peut penser que la limite de u_n est 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

- On peut penser que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

- On peut penser que la suite (u_n) converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

On peut penser que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est égale à 1.

Il est à noter que le tableau de valeurs obtenu sur la calculatrice permet d'apprécier la vitesse de convergence (ou limite de la suite).

Du point de vue de la monotonie (qui n'est pas demandée dans cette question), l'observation du tableau de valeurs et du nuage de points laisse penser que la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 0.

On peut aisément démontrer ce résultat par le calcul (calcul littéral, en utilisant par exemple la méthode de la différence).

Il faut noter qu'aucun lien n'est mis en évidence cette année entre monotonie et convergence.

Ce n'est pas parce que la suite (u_n) est croissante qu'elle tend vers 1.

Le lien entre convergence et monotonie sera mis en évidence en Terminale sous forme d'une propriété.

On notera que la valeur 1 n'est jamais atteinte (les termes se rapprochent de plus en plus de 1 sans jamais être égal à 1).

2°)

Cette question justifie un peu le 1°).

• Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n}{n+1}$ (on est obligé de mettre \mathbb{N}^* car lorsque l'on va forcer la factorisation, on va diviser par n donc n doit être non nul)

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad (\text{on force la factorisation au dénominateur})$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Vu la simplicité de la question, il vaut mieux partir de l'expression initiale de u_n .

• Utilisons cette égalité pour justifier brièvement le résultat de la question 1°).

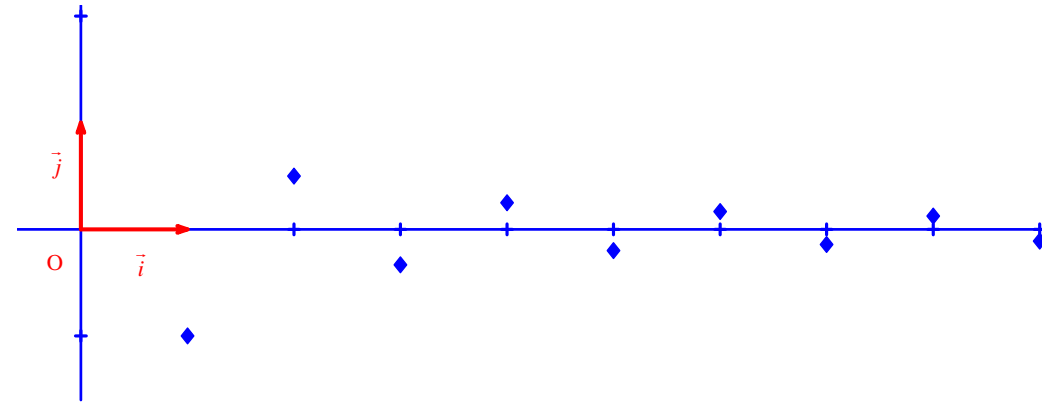
On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

On peut donc en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (en admettant les résultats intuitifs de limite d'une somme et de limite d'un quotient).

On aurait aussi pu exploiter la réécriture $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour justifier ce résultat.

$$\boxed{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

La suite (u_n) est définie en mode explicite.



L'observation du tableau de valeurs et du nuage de points obtenus sur la calculatrice fait apparaître un « comportement oscillant ».

La suite (u_n) n'est pas monotone.

Les termes sont alternativement positifs ou négatifs suivant la parité de l'indice comme on peut le voir facilement sur l'expression du terme général de la suite : u_n est du signe de $(-1)^n$ donc si l'indice est pair le terme est positif, si l'indice est impair, le terme est négatif.

On peut néanmoins observer que les termes se rapprochent de 0.

On peut donc penser que la suite (u_n) converge vers 0.

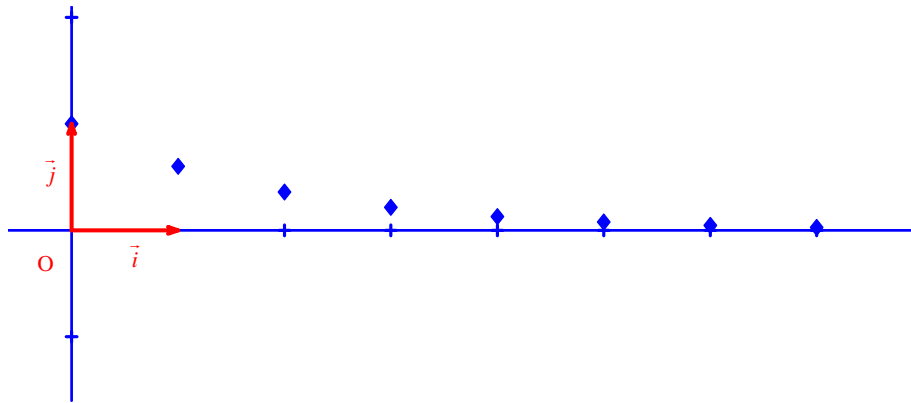
On peut donc penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La limite n'est jamais atteinte (la limite peut être atteinte dans certains cas, par exemple dans le cas d'une suite constante).

Ce résultat est vrai et pourra être démontré en Terminale.
Cet exercice montre un exemple de suite non monotone qui converge vers 0.

$$\boxed{3} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (0,6)^n$$

Les parenthèses autour de 0,6 sont des parenthèses de sécurité.



1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$).

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$.**

À l'aide la calculatrice, on peut dire que le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ est 19.

On peut procéder par tâtonnements sur la calculatrice ou bien on peut créer un programme (avec une boucle « Tantque »).
L'algorithme correspondant à ce programme est un algorithme permettant la détermination d'une valeur seuil.
En Terminale, on pourra résoudre ce type de question par le calcul en utilisant la fonction logarithme népérien.

Commentaires généraux sur la suite (u_n) :

- La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6 (et de premier terme 1).
- Elle est décroissante car $u_0 > 0$ et $0 < 0,6 < 1$.

Faire le graphique.

Montrer le « tube » $] -0,0001 ; 0,0001[$ sur l'axe des ordonnées.

Comme la suite (u_n) est décroissante, on peut écrire la proposition suivante : « Si $n \geq 19$, alors $u_n < 10^{-4}$ ».

$$\boxed{4} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Les parenthèses autour de $-\frac{1}{3}$ sont indispensables.

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$).

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$.**

À l'aide la calculatrice, on peut dire que le plus petit entier naturel n tel que $|u_n| < 10^{-6}$ est 13.

En Terminale, on pourra résoudre ce type de question par le calcul en utilisant la fonction logarithme népérien.

Commentaires généraux sur la suite (u_n) :

- La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ (et de premier terme 1).
- Elle est non monotone car sa raison est strictement négative.

$$\boxed{5} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^3 - n$$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$).

On pourra démontrer ce résultat en Terminale.

La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $+\infty$).

On ne peut pas calculer la limite cette année ; ce n'est pas précis.

$$\boxed{6} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2}{n+1}$$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$).

On pourra démontrer ce résultat en Terminale.

La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $+\infty$).

$$\boxed{7} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5 - n^2$$

Comportement de u_n en $+\infty$.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$).

Cela peut se justifier intuitivement grâce au résultat admis dans le cours : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

On pourra démontrer ce résultat rigoureusement en Terminale.

La suite (u_n) est divergente (elle diverge vers $-\infty$).

$$\boxed{8} \begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,5u_n + 2 \end{cases}$$

Comportement de u_n en $+\infty$.

Avec la calculatrice :

- On calcule $u_1 = 5,5$; $u_2 = 4,75$; $u_3 = 4,375$; ...

- On effectue la représentation graphique de la suite (en marche d'escalier ou en toile d'araignée).

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 4 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$).

$$\boxed{9} \begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right) \end{cases}$$

Comportement de u_n en $+\infty$.

Avec la calculatrice :

- On calcule $u_1 \approx 4,72$; $u_2 \approx 2,78$; $u_3 \approx 2,1$; $u_4 \approx 2$; $u_5 \approx 2 \dots$

- On effectue la représentation graphique de la suite (en marche d'escalier ou en toile d'araignée).

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 2 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$).

$$\boxed{10} \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

1°) **Comportement de u_n en $+\infty$.**

On tabule et on représente la suite (u_n) sur la calculatrice.

On peut penser que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$).

2°) On admet que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 0$ (résultat que l'on peut justifier par un raisonnement de proche en proche).

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-4}$ (on pourra utiliser un programme).

$$u_{99} = 0,101$$

$$u_{100} = 0,1$$

$$\boxed{11} \begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tracer la représentation graphique \mathcal{C} de la fonction

$f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ (prendre un centimètre pour unité graphique).

Effectuer la construction itérative des termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2°) **Sens de variation et comportement asymptotique de la suite (u_n)**

Le graphique effectué dans la question 1°) permet l'observation d'un « point de convergence ».

Avec le graphique, on peut penser que la suite (u_n) est décroissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

3°) On admet que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n - 2 < 10^{-3}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow u_n < 2,001$$

$$\text{On a : } u_4 = 2,0145$$

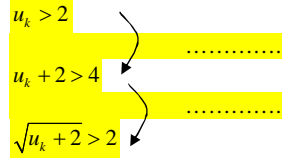
$$u_5 = 2,0036$$

Donc le plus entier naturel n tel que $u_n < 2,001$ est **5**.

On veut démontrer par un raisonnement de proche en proche que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$.

On considère la phrase $P(n)$: « $u_n > 2$ » (il s'agit d'une phrase ouverte)

...



$$u_{k+1} > 2$$

Recopier et justifier les deux passages marqués par des flèches.

$$\boxed{12} \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$$

En comparant les valeurs de u_n obtenues sur calculatrice avec les premières décimales du nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on constate qu'elles sont égales à partir d'un certain rang.

On peut donc penser que la suite (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Commentaires :

- On pourra effectivement démontrer ce résultat en Terminale.
- Le nombre d'or est un nombre irrationnel extrêmement célèbre en mathématiques.

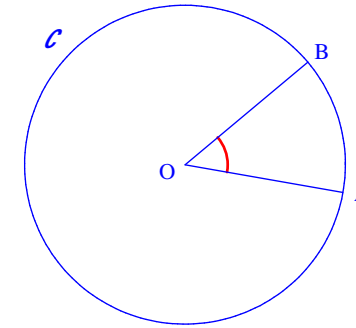
14 Polygones réguliers

\mathcal{C} : cercle de centre O et de rayon 1

\mathcal{P}_n : polygone régulier à n côtés (avec $n \geq 4$) inscrit dans \mathcal{C}

1°) A et B : sommets consécutifs du polygone

Faire une figure avec le cercle \mathcal{C} et deux points A et B.



Exprimons la mesure en radians de l'angle \widehat{AOB} en fonction de n .

Les angles au centre ont tous pour mesure.

La mesure d'un angle plein est 2π .

$$\text{Donc } \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}.$$

2°)

• Démontrons que l'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AOB} &= \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \widehat{AOB} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

- Déduisons-en l'aire A_n du polygone P_n .

$$A_n = n A_{AOB}$$

$$\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

3°) Étudions le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Pouvait-on prévoir le résultat ?

Il semble que A_n tend vers π lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarques :

- On peut dire que $A_n < \pi$ puisque l'on est dans le disque
- On pourrait faire de même avec le périmètre. On pourrait aussi s'intéresser au périmètre du polygone régulier.
- Cet exercice peut être relié à la méthode d'Archimède.

15 Le premier jour de propagation d'une épidémie sur une population de 1 500 personnes, 90 personnes ont été contaminées. Ensuite, le nombre de nouvelles personnes contaminées diminue chaque jour de 10 %. On désire étudier l'évolution de cette épidémie.

1°) Pour chaque entier naturel $n \geq 1$, on note u_n le nombre de personnes contaminées le jour n . Ainsi $u_1 = 90$.

a)

Étudions la nature de la suite (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n \times 0,9$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 90$ et de raison $q = 0,9$.

Déduisons-en l'expression de u_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 90 \times 0,9^n$$

b) Déterminons à partir de combien de jours on peut considérer que l'épidémie est stoppée.

On cherche n tel que $u_n < 1$.

On peut considérer que l'épidémie est stoppée au bout de 43 jours.

2°) On s'intéresse au nombre S_n de personnes contaminées au total depuis le premier jour jusqu'au jour n .

a) Exprimons S_n en fonction de n .

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= 90 \times \frac{1-0,9^n}{1-0,9}$$

$$= 900(1-0,9^n)$$

b) Vers quelle valeur semble tendre le nombre total de personnes contaminées lorsque le nombre de jours devient « grand » ?

Il semble que S_n tende vers 900 lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Quel pourcentage de la population sera contaminé par la grippe ?

$$\frac{900}{1500} = \frac{3}{5} = 0,6$$

60 % de la population sera contaminé par la grippe.

Cet exercice montre une utilisation des limites de suites dans une suite situation concrète : évolution d'une épidémie.

Cette limite sera justifiée en Terminale grâce à une propriété du cours.

Au bout d'un moment la calculatrice elle sait plus...

On pourrait caractériser les dominés par des inéquations.

16 La suite (u_n) est convergente (sa limite est égale à 0).

Ce théorème sera justifié en Terminale avec le « théorème des gendarmes » (ou « théorème d'encadrement »).

17 On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n) . Elle peut être convergente ou divergente (limite infinie ou pas de limite).

18 On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n) .

19 On ne peut rien dire du comportement asymptotique de la suite (u_n) .

20 La suite (u_n) est convergente (sa limite est égale à 0).

21 La suite (u_n) est divergente (sa limite est égale à $+\infty$).

$$\boxed{22} (u_n) \begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Faire des essais sur la calculatrice pour plusieurs valeurs de u_0 .

Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Il semble que :

- si $u_0 \geq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$;
- si $0 \leq u_0 < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{23} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{n+2}$$

1°) Que peut-on penser du comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

2°) **Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ (1).**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{n+2} > 100 \\ &\Leftrightarrow n+2 > 10\,000 \\ &\Leftrightarrow n > 9998 \end{aligned}$$

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 100$ est 9999.

$$\boxed{24} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 3n + 1$$

1°) **Comportement asymptotique de la suite (u_n)**

On peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2°) Résultats du logiciel de calcul formel :

$f(x) \geq 1\,000$	$x \geq 30,1425346646$
$f(x) \geq 10\,000$	$x \geq 98,506498047$
$f(x) \geq 100\,000$	$x \geq 998,500625$

Les résultats du logiciel de calcul formel s'interprètent ainsi :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1\,000$ est l'intervalle $[A ; +\infty[$ avec $A = 30,142534664\dots$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 10\,000$ est l'intervalle $[B ; +\infty[$ avec $B = 98,50649804\dots$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 100\,000$ est l'intervalle $[C ; +\infty[$ avec $C = 998,50062\dots$

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 1\,000$ est **31 (plus petit entier naturel supérieur ou égal à A)**.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10\,000$ est **99**.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 100\,000$ est **999**.

On peut compléter les phrases :

- Si $n \geq 31$, alors $u_n \geq 1\,000$.
- Si $n \geq 99$, alors $u_n \geq 10\,000$.
- Si $n \geq 999$, alors $u_n \geq 100\,000$.

Cet exercice montre bien l'intérêt d'outils de calcul formel car la résolution par le calcul des inéquations considérées dans cet exercice s'avèrerait extrêmement fastidieuse.

Les résultats obtenus grâce au logiciel permettent de porter l'attention non sur les calculs mais sur leur interprétation et leur utilisation pour la résolution des questions.

24 Suites et probabilités

roue comportant 20 cases

18 cases noires
2 cases rouges.

n lancers de suite ($n \geq 1$)

Les n lancers sont réalisés dans des conditions identiques indépendantes.

1°) **Exprimons en fonction de n la probabilité p_n que le joueur obtienne au moins une fois une case rouge.**

Pour un lancer, la probabilité d'obtenir une case noire est égale à : $\frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0,9$.

$$\begin{aligned}
 p_n &= P(\text{« le joueur obtient au moins une fois une case rouge »}) \\
 &= 1 - P(\text{« le joueur n'obtient aucune case rouge »}) \\
 &= 1 - P(\text{« le joueur n'obtient que des cases noires »}) \\
 &= 1 - 0,9 \times 0,9 \dots \times 0,9 \quad (\text{on applique le principe multiplicatif ; le produit comporte } n \text{ facteurs}) \\
 &= 1 - 0,9^n
 \end{aligned}$$

$$p_n = 1 - 0,9^n$$

Commentaire :

On pourrait aussi faire appel à la loi binomiale.
Mais cela donne une solution plus longue donc mieux vaut éviter de parler de loi binomiale.

2°) **Limite de p_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.**

On tabule la suite sur la calculatrice.

On peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ (autrement dit : on peut penser que la suite (p_n) converge vers 1).

Commentaire :

- Ce résultat sera justifié rigoureusement en Terminale (un résultat du cours permettra de dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$).
- En tabulant les termes sur la calculatrice, on constate que la suite (p_n) semble croissante.
- Ce résultat est visualisable également sur le nuage de points que l'on peut obtenir.
- On peut démontrer aisément que la suite (p_n) est croissante à partir de l'indice 1.

On peut penser que lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité d'obtenir au moins une fois une case rouge tend vers 1.

Concrètement, lorsque le nombre de lancers devient de plus en plus grand, on est quasiment certain d'obtenir au moins une fois une case rouge (ce résultat semble logique).

La détermination de valeurs seuils permet de faire le lien entre ce chapitre et l'algorithmique.

Tableaux de valeurs pour quelques exercices

1 Tableau de valeurs

n	u_n
0	0
1	0,5
2	0,66667
3	0,75
... + ∞	

3 Tableau de valeurs

n	u_n
0	1
1	0,6
2	0,36
3	0,216
... + ∞	

4 Tableau de valeurs

n	u_n
0	1
1	-0,3333
2	0,11111
3	
... + ∞	

5 Tableau de valeurs

n	u_n
0	0
1	0
2	6
3	24
... + ∞	

8 Tableau de valeurs

n	u_n
0	7
1	5,5
2	4,75
3	4,375
... + ∞	

6 Tableau de valeurs

n	u_n
0	0
1	0,5
2	1,3333
3	2,25
... + ∞	

7 Tableau de valeurs

n	u_n
0	5
1	4
2	-27
3	-238
... + ∞	