TS

Limites de fonctions (2)
Études de cas d'indétermination

Commentaire : quand on rencontre une FI, on est obligé de modifier l'expression « originale » de la fonction (on fait ce que l'on appelle une « réécriture » de l'expression).
Le but de ce chapitre est de passer en revue quelques méthodes de réécriture.

I. FI du type « ∞ – ∞ »

1°) Méthode générale

Réécriture avec mise en facteur du terme dominant.

Exemples

● **Exemple 1**

$f : x \mapsto 3x - \sqrt{x} + 4$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$

(f n'est pas une fonction polynôme.)

Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

FI du type « ∞ – ∞ »

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = x\left(3 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{x}\right)$

Explication : $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \times \cancel{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = x\left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}\right) = 3\end{array}\right\} \text{donc par limite d'un produit } \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

● **Exemple 2**

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 3x$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

FI du type « ∞ – ∞ »

$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 3x$

$f(x) = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 3x$ **(on peut « séparer » les racines car les deux facteurs du produit sont positifs ou nuls)**

$f(x) = |x| \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 3x$ **(explication : $\sqrt{x^2} = |x|$)**

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = x \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 3x$ (en effet : pour $x \geq 0$ $|x| = x$)

$f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 3\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 3\right) = -2\end{array}\right\} \text{donc par limite d'un produit } \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

2°) Cas particulier : fonctions polynômes non nulles en + ∞ et en – ∞

Règle du monôme de plus haut degré.

3°) Technique de quantité conjuguée pour les fonctions avec radicaux

Exemple

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

FI du type « ∞ – ∞ »

La technique générale de marche pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \times \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{1 \times \underbrace{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}_{\text{quantité non nulle pour } x>0}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

II. FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

1°) Méthode générale

On met en facteur les termes dominants au numérateur et au dénominateur puis on simplifie.

2°) Cas particulier : fonctions rationnelles non nulles en + ∞ et en – ∞

On applique la règle du quotient simplifié des monômes de plus haut degré.

III. FI du type « 0 $\times\infty$ »

1°) Méthode générale

Réécriture de la fonction (on transforme l'expression de la fonction).

2°) Cas particulier : changement de variable

IV. FI du type « $\dfrac{0}{0}$ »

1°) Méthode générale

Réécriture de la fonction. On factorise le numérateur et le dénominateur puis on simplifie.

Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Déterminer $\lim\limits_{1} f$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+2x-3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to1}\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right\}\text{ FI du type "}\frac{0}{0}\text{"}$$

⚠ On ne peut pas appliquer la règle des monômes.

$$\forall x\in\mathcal{D}_f \quad f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{x+3}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4 \\ \lim\limits_{x\to1}(x+1)=2\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x)=2}$$

2°) Méthode particulière pour les fonctions avec radicaux : quantité conjuguée

3°) Méthode par utilisation de la définition d'un nombre dérivé

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$h=x-a$$

Exemple-type : ROC

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

Déterminer $\lim\limits_{0} f$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\sin 0=0 \\ \lim\limits_{x\to0} x=0\end{array}\right\}\text{ FI du type "}\frac{0}{0}\text{"}$$

⚠ Le théorème des gendarmes ne permet pas de conclure ici.

On va interpréter le quotient comme un taux de variation.

On pose $u(x)=\sin x$.

On sait que $u(0)=0$.

Donc on peut écrire $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}$.

On sait que la fonction $u=\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=\cos x$.

Donc par définition du nombre dérivé de u en 0, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)-u(0)}{x-0} = u'(0) = \cos 0$$
$\cos 0 = 1$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$.

Cette limite est à présent considérée comme une limite de référence.
On peut désormais l'utiliser sans refaire la démonstration.

V. Complément sur les branches infinies

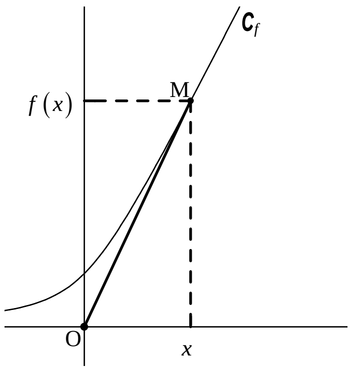
1°) Explication

f est une fonction telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente **une branche infinie** lorsque *x* tend vers + ∞.
On souhaite étudier la forme de cette branche infinie dans certains cas.

M est un point quelconque de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x \neq 0$.
On considère la droite (OM) (on ne peut pas vraiment dire que la droite (OM) est une « sécante » à la courbe).

Le coefficient directeur de (OM) est égal à $m = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{f(x)}{x}$.



2°) Retenir

• Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on dira que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente **une branche parabolique de direction (O*y*)** lorsque *x* tend vers + ∞.

• Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dira que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente **une branche parabolique de direction (O*x*)** lorsque *x* tend vers + ∞.

• Lorsque $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$ et $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax\right] = \pm\infty$, on dira que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente **une branche parabolique de direction la droite Δ d'équation *y* = *ax*** lorsque *x* tend vers + ∞.

Même chose en – ∞.

Mise en garde importante :

Cette année, on effectuera ce travail (calcul de $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$) que lorsque l'énoncé demande explicitement de démontrer qu'une courbe admet une branche parabolique en +∞ ou en – ∞ (aucune question à initiative personnelle ne sera posée cette année).

Bilan sur les FI
Différentes techniques à connaître

A : Transformations d'écritures ; réécritures

1) Factorisations ; factorisations partielles

Exemple :

$e^{3x}-3e^{x}+2=e^{2x}\left(e^{x}-3\right)+2$ permet de déterminer la limite en + ∞.

2) Expression sans dénominateur ⟶ expression avec dénominateur

Exemple :

$x+e^{-x}=x+\dfrac{1}{e^{x}}=\dfrac{xe^{x}+1}{e^{x}}$ permet de déterminer la limite en – ∞.

Cas particulier des quantités conjuguées pour les expressions avec racines carrées

3) Somme de quotients ⟶ mise au même dénominateur

Exemple :

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^{2}}=\dfrac{x-1}{x^{2}}$ permet de déterminer la limite en 0^{+}.

4) Expression factorisée ⟶ expression développée

Exemple :

$e^{x}\left(x+1\right)=xe^{x}+e^{x}$ permet de déterminer la limite en – ∞.

5) Quotient ⟶ somme de quotients

Exemple :

$\dfrac{e^{x}-1}{x}=\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{1}{x}$ permet de déterminer la limite en + ∞.

6) Produit ⟶ réorganisation de facteurs

Exemple :

$xe^{2x}=xe^{x}\times e^{x}$ permet de déterminer la limite en – ∞.

On peut aussi utiliser un changement de variable dans ce dernier cas.

B : Quelques remarques

1) Intervention de limites de référence (FI de référence) : bien retenir toutes les limites de référence qui vont être étudiées au fur et à mesure des chapitres.
Ces limites de référence sont à utiliser dans leur « forme pure » ce qui nécessite parfois de faire un changement de variable pour s'y ramener.

2) Les transformations d'écriture effectuées imposent de préciser les domaines de validité.

Lorsque l'on étudie la limite d'une fonction en + ∞, on peut toujours faire une réécriture « pour x assez grand ». On peut par exemple utiliser sans aucun inconvénient une réécriture pour x positif.

Lorsque l'on étudie la limite d'une fonction en – ∞, on peut toujours faire une réécriture « pour x assez petit ». On peut par exemple utiliser sans aucun inconvénient **une réécriture pour x négatif.**

3) Les méthodes rappelées dans la partie A sont là pour donner des idées pour lever des cas d'indétermination.

Elles ne sont pas non plus exhaustives.
Il faut surtout faire preuve d'inventivité (en essayant par exemple de sentir ce qui l'emporte).

Exemple :

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2}x}{x^{2}}$.

On réécrit : $\dfrac{\sin^{2}x}{x^{2}}=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{2}$ (principe d'englobement des carrés dans un seul carré).

On utilise alors $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{2}x}{x^{2}}=1$.

C : Appendice : limites de référence à connaître

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0^{+}}\left(x\ln x\right)=0$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+h\right)}{h}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Pour commencer

Quels sont les types de F.I. connues ?

FI du type « $\infty - \infty$ »

FI du type « $0 \times \infty$ »

F.I. du type "$\frac{\infty}{\infty}$"

F.I. du type "$\frac{0}{0}$"

Dans chaque cas, on a vu que l'on pouvait tout trouver.

On donne les fonctions suivantes pour lesquelles on désire faire l'étude de limite indiquée (à côté de chacune d'elle).

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ **étude en 1**

$f_2 : x \mapsto 3x - \sqrt{x} + 4$ **étude en $+\infty$**

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 3x$ **étude en $+\infty$**

$f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$ **étude en $+\infty$**

1^er^ travail :

Démontrer que l'on rencontre chaque fois une FI pour déterminer la limite.
Donner le type de FI que l'on rencontre (en écriture symbolique avec des guillemets).
Classer les fonctions suivant le type de FI que l'on rencontre (on pourra faire un tableau).

2^e^ travail :

Elaborer une technique pour déterminer le limite (lever l'indétermination dans chaque cas).

On pourra visualiser les courbes des différentes fonctions à l'écran d'un ordinateur (ou à défaut d'une calculatrice) ou un logiciel de calcul formel pour avoir une idée de la limite cherchée.

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

Étude en 1

$$\frac{x^2+2x-3 \to 0}{x^2-1 \to 0}$$

$$\Downarrow$$

F.I. du type "$\frac{0}{0}$"

$$f_2 : x \mapsto 3x-\sqrt{x}+4$$

Étude en + ∞

$$\underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{3x}} - \underset{\downarrow}{\underset{+\infty}{\sqrt{x}}} + \underset{\downarrow}{\underset{4}{4}}$$

$$\Downarrow$$

FI du type « ∞ – ∞ »

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 3x$

Étude en + ∞

$\sqrt{x^2+1} \quad - \quad 3x$

$+\infty \qquad\qquad +\infty$

FI du type « ∞ – ∞ »

$f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$

Étude en + ∞

$\sqrt{x^2+1} \quad - \quad x$

$+\infty \qquad\qquad +\infty$

FI du type « ∞ – ∞ »

Classification en tableau :

FI du type « $\infty - \infty$ »	FI du type « $0 \times \infty$ »	FI du type « $\frac{0}{0}$ »	FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Recherche de transformations algébriques permettant de lever l'indétermination (on complexifie l'expression pour pouvoir résoudre le problème).

F.I.

Réécriture à faire dépend de 2 choses

du type de FI que l'on rencontre

de la forme de l'expression que l'on rencontre

Il peut arriver que l'on utilise 2 méthodes pour lever une indétermination