Problème

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

Partie A

1°) a) Justifier l'existence de I_n.

b) Sans calculer I_n, démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, dont tous les termes sont positifs.

2°) a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n.

3°) a) Calculer I_2.

b) Calculer $f(2) + f(6) + f(10) + \ldots + f(4k-2)$ en fonction de I_1 et I_{4k+2} $(k \in \mathbb{N}^*)$.

c) On pose $u_k = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots - \dfrac{1}{4k-1} + \dfrac{1}{4k+1}$.

Quelle est $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k$?

4°) a) Calculer I_1.

b) Calculer $f(1) + f(5) + f(9) + \ldots + f(4k-3)$ en fonction de I_1 et I_{4k+1} $(k \in \mathbb{N}^*)$.

c) On pose $v_k = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2k-1} + \dfrac{1}{2k}$.

Quelle est $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k$?

Partie B

Soit α un réel de l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $K_n(\alpha) = \int_0^{\alpha} (\tan x)^n \, dx$ et $S_n(\alpha) = K_1(\alpha) + K_2(\alpha) + \ldots + K_n(\alpha)$.

On étudie la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1°) Soit x un réel de l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Démontrer que l'on a : $\left| \tan x + \tan^2 x + \ldots + \tan^{n+1} x - \dfrac{\tan x}{1-\tan x} \right| = \dfrac{\tan^{n+1} x}{1-\tan x}$.

Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [0 ; \alpha]$ $0 \leqslant \dfrac{\tan^p x}{1-\tan x} \leqslant \dfrac{\tan^p \alpha}{1-\tan\alpha}$.

2°) Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\left| S_n(\alpha) - \int_0^{\alpha} \dfrac{\tan x}{1-\tan x} \, dx \right| \leqslant \alpha \dfrac{\tan^n \alpha}{1-\tan\alpha}$.

En déduire la limite de la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand $n \to +\infty$.

3°) On se propose de préciser cette limite.

On pose $A(\alpha) = \int_0^{\alpha} \dfrac{\sin x}{\cos x - \sin x} \, dx$ et $B(\alpha) = \int_0^{\alpha} \dfrac{\cos x}{\cos x - \sin x} \, dx$.

Calculer $B(\alpha) - A(\alpha)$, $B(\alpha) + A(\alpha)$ puis $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\alpha)$.