1

$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du jeudi 16 mai 2013 (30 min)

Prénom : …………………………………………………… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (4 points)

Simplifier les expressions suivantes où x un réel quelconque :

$\cos 9x \cos 8x + \sin 9x \sin 8x =$ ………………. ; $\sin 9x \cos 8x - \cos 9x \sin 8x =$ ………………. .

II. (4 points)

Compléter sans expliquer les égalités suivantes où x un réel quelconque :

$\sqrt{3}\cos x - \sin x =$ …. $\sin(\text{…….} - \text{…….})$; $\cos x + \sqrt{3}\sin x =$ …. $\sin(\text{…….} + \text{…….})$.

III. (4 points)

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto (\cos x + \sin x)^2 - \sin 2x$ est constante.

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (8 points)

Soit x un réel quelconque.

1°) Démontrer que $\sqrt{1-\cos 2x} = |\sin x|\sqrt{2}$ et que $\sqrt{1+\cos 2x} = |\cos x|\sqrt{2}$.

2°) En déduire que si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$, alors $\sqrt{1+\cos 2x} + \sqrt{1-\cos 2x} = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 16-3-2013

I.

$\cos 9x\cos 8x+\sin 9x\sin 8x=\cos x$; $\sin 9x\cos 8x-\cos 9x\sin 8x=\sin x$

II.

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x-\sin x&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right) &&\text{(on force la factorisation par 2)}\\ &=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) &&\text{(on reconnaît des valeurs remarquables du cosinus et du sinus)}\\ &=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x+\sqrt{3}\sin x&=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right).\\ &=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)\\ &=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\end{aligned}$$

III.

Démontrons que la fonction $f : x\mapsto (\cos x+\sin x)^2-\sin 2x$ est constante.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)&=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x\sin x-2\sin x\cos x\\ &=1\quad(\text{car } \cos^2 x+\sin^2 x=1)\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

IV.

1°) **Démontrons que $\sqrt{1-\cos 2x}=|\sin x|\sqrt{2}$ et que $\sqrt{1+\cos 2x}=|\cos x|\sqrt{2}$.**

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos 2x}&=\sqrt{2\sin^2 x}\\ &=|\sin x|\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos 2x}&=\sqrt{2\cos^2 x}\\ &=|\cos x|\sqrt{2}\end{aligned}$$

2°) **Déduisons-en que si $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$, alors $\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.**

Si $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$, on a $\cos x\geqslant 0$ et $\sin x\leqslant 0$.

Donc $\sqrt{1-\cos 2x}=-\sin x\sqrt{2}$ et $\sqrt{1+\cos 2x}=\cos x\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos 2x}+\sqrt{1-\cos 2x}&=\cos x\sqrt{2}-\sin x\sqrt{2}\\ &=2\left(\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$