Exercices sur arithmétique et géométrie dans l'espace

1 1°) a) Déterminer un couple (x_0 ; y_0) d'entiers relatifs solution de l'équation $48x + 35y = 1$ (E).
b) Déduire de a) tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de cette équation.
2°) L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on donne le vecteur $\vec{u}$ (48 ; 35 ; 24) et le point A(– 11 ; 35 ; – 13).
a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble π des points M de l'espace, de coordonnées (x ; y ; z) tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
b) Soit *D* la droite d'intersection de π avec le plan d'équation $z = 16$.
Déterminer tous les points de *D* dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [– 100 ; 100].
En déduire les coordonnées du point de *D*, à coordonnées entières situé le plus près de l'origine.

2 On considère l'équation $24x + 36y = 60$ (1), où x et y sont des entiers relatifs.
1°) Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (1).
2°) Trouver une solution évidente pour l'équation (1) et résoudre cette équation. On appellera *S* l'ensemble des couples (x ; y) solutions.
3°) Énumérer tous les couples (x ; y) solutions de (2) et tels que : $-10 \leqslant x \leqslant 10$.
Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.
4°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble *E* des points M de coordonnées (x ; y) telles que : $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1-2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$).
5°) Démontrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x ; y) de l'équation (1) appartiennent à *E*.
Comment peut-on caractériser S ?

3 1°) Déterminer PGCD (2688 ; 3 024).
2°) Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.
a) Démontrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :
$2\,688x + 3\,024y = -3360$ (1) ; $8x + 9y = -10$ (2).
b) Vérifier que (1 ; – 2) est une solution particulière de l'équation (2).
c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2).
3°) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les plans *P* et *Q* d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.
a) Démontrer que *P* et *Q* se coupent suivant une droite *D* et que les coordonnées de points de *D* vérifient l'équation (2).
b) En déduire l'ensemble des points de *D* dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

4 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $\mathrm{M}_{n+1} = f(\mathrm{M}_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.
1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
3°) Soit deux entiers naturels n et p tels que n soit supérieur ou égal à p.
Démontrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.
a) On considère l'équation $12x - 5y = 3$ (E) où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E).
b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

5 1°) Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté **l**, où **l** et L sont des entiers naturels non nuls tels que **l** < L.
On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête *a* est un enter naturel non nul (les cubes doivent remplir complètement la boîte B, sans laisser d'espace vide).
a) Dans cette question, **l** = 882 et L = 945.
Quelle est la plus grande valeur possible pour *a* ?
Quelles sont les valeurs possibles pour *a* ?
b) Dans cette question, le volume de la boîte B est **v** = 77 760. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de *a* est 12.
Démontrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles ; on en donnera les dimensions.
2°) On veut remplir une boîte cubique C dont l'arête *c* est un entier naturel non nul avec des boîtes B toutes identiques (les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la boîte C sans laisser d'espace vide).
a) Dans cette question, **l** = 882 et L = 945.
Quelle est la plus petite arête *c* pour la caisse C ?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête *c* ?
b) Dans cette question, le volume de la boîte B est 15 435. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions **l** et L de la boîte B ?