TS1

Contrôle du mardi 12 février 2013 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

I. (13 points)

Partie A

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Dresser le tableau de variations de *f* sur I sans les limites.
En déduire que pour tout *x* appartenant à I on a $f(x) \leqslant 0$ (1).

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

1°) On considère l'algorithme suivant dont les variables sont i, *n* et *u* avec *i* et *n*, entiers naturels non nuls et *u*, un réel.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  u prend la valeur $u + \frac{1}{i}$
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

Donner, sans expliquer ni détailler les calculs, la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

La programmation sur calculatrice n'est pas demandée.

2°) Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de *n*.

3°) Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis au millième.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

1°) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = f\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2°) a) Soit *k* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
En appliquant l'inégalité (1) à $\frac{1}{k}$, démontrer que $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

b) Écrire les inégalités obtenues en remplaçant successivement *k* par 1, 2, 3, … *n* et démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n \geqslant 0$.

3°) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

II. (8 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}$.
On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i}$, $4-\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$.

Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1°) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés aux points A, B et C.
On donnera les résultats sous forme algébrique simplifiée.
Le détail des calculs n'est pas demandé sur la copie.

2°) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle Γ' dont le centre est le point Ω d'affixe i et dont on déterminera le rayon.

3°) Soit S le point d'affixe 2. On note Γ le cercle de centre S et de rayon $\sqrt{5}$.
a) Soit M un point d'affixe *z* appartenant au cercle Γ.
Démontrer que l'on a $|z' - \mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.
b) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle Γ.

III. (7 points)

Soit ABCD un tétraèdre.
On note I le milieu de [AB], J le milieu de [CD], K le point défini par l'égalité $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{BC}$ et L le point défini par l'égalité $\overrightarrow{AL} = \lambda\overrightarrow{AD}$ où λ désigne un réel fixé.

On rapporte l'espace au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Aucune figure n'est demandée sur la copie.

1°) Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L dans ce repère (en justifiant brièvement).

2°) Démontrer à l'aide des coordonnées que l'on a : $\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{IK} + 2\lambda\overrightarrow{IJ}$ (1).
Que peut-on en déduire pour les points I, J, K, L ? Justifier la réponse.

3°) On note M le milieu de [KL].
Démontrer à l'aide de l'égalité (1) sans utiliser les coordonnées que le point M appartient à la droite (IJ).

IV. (7 points)

Partie A

Une enquête portant sur un grand nombre de clients d'une grande surface spécialisée en informatique a montré que 80 % des clients avaient bénéficié des conseils d'un vendeur.
De plus, 70 % des clients qui ont bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat alors que 20 % seulement des clients qui n'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat.

Donner les résultats des deux questions de cette partie sans justifier.

1°) On interroge au hasard un des clients sur lesquels a porté l'enquête et on admet qu'il y a équiprobabilité.

Quelle est la probabilité qu'il ait effectué un achat ?
Donner le résultat sous forme décimale.

2°) On interroge au hasard un des clients qui ont effectué un achat et on admet qu'il y a équiprobabilité.

Quelle est la probabilité qu'il ait bénéficié des conseils d'un vendeur ?
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie B

Le magasin annonce dans sa publicité que 92 % des clients sont satisfaits. Lors d'une enquête auprès de 540 de ses clients, 505 se sont déclarés satisfaits.

1°) Sous l'hypothèse $p = 0,92$, déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence des clients satisfaits au seuil de 95 % (écrire les bornes sous forme fractionnaire).
Que peut-on en déduire sur la publicité de cette grande surface ?

2°) Même question avec un seuil de 99 %.

V. (6 points)

On justifiera chaque résultat avec précision.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1)$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x(x-1)^2}{2x^3 - x + 1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (6 points)

Pour tout l'exercice on pourra utiliser l'égalité suivante valable pour tout réel x :

$$(x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$ (1)

$(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$ (2)

$\ln x + \ln(x^2+1) = \ln 2 + \ln(x^2 + x - 1)$ (3)

II. (2 points)

On demande de répondre sans justifier les réponses.

1°) Pour tout réel x strictement positif, parmi les cinq expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales ?

$A = \ln(x^2) + \ln(x)$ $B = \ln(x^2) \times \ln(x)$ $C = (\ln(x))^2 + \ln(x)$ $D = \ln(x^2 + x)$ $E = \ln(x) \times (1 + \ln x)$

2°) Parmi les quatre réels suivants, déterminer celui qui est différent des autres.

$A = \ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \dfrac{e^{\ln 9}}{e^{\ln 2}}$ $B = e^{2\ln 3}$ $C = \dfrac{e^{\ln 3 + \ln 2}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}$ $D = \left(\ln\left(e^2\right)\right)^3$

III. (12 points)

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 « gros » carreaux).

1°) Calculer $f(x) + f(-x)$ pour tout nombre réel x.

2°) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3°) Dresser le tableau de variations de f complet avec les limites.

4°) Faire un tableau de valeurs pour x allant de -2 à 2 avec un pas de $0{,}1$.

Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que ses asymptotes.

5°) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
Tracer T sur le graphique précédent.

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (6 points)

Soit a, b, c trois entiers naturels.
On suppose que a et b sont premiers entre eux.

Le but de l'exercice est de démontrer que $\text{PGCD}(a\,;bc)=\text{PGCD}(a\,;c)$.

1°) Soit d un diviseur commun à a et à bc.

Démontrer que d est un diviseur de $\text{PGCD}(ac\,;bc)$.
En déduire que d est un diviseur commun à a et à c.

2°) Réciproquement, démontrer que si d' est un diviseur commun à a et à c, alors d' est un diviseur commun à a et à bc.

3°) Conclure.

II. (14 points)

On pose $a=n^2+1$ et $b=n\left(n^2-1\right)$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On pose $d=\text{PGCD}(a\,;b)$.

1°) Démontrer que a et n sont premiers entre eux.

2°) En déduire que l'on a : $d=\text{PGCD}\left(a\,;n^2-1\right)$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice **I**.

3°) Donner une combinaison linéaire à coefficients entiers de a et n^2-1 indépendante de n.
En déduire les valeurs possibles de d.

4°) Déterminer la valeur de d suivant la parité de n.

Corrigé du contrôle du 12-2-2013

I.

Partie A

$f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$

1°) **Calculons $f'(x)$.**

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$$
$$= -\frac{x}{1+x}$$

2°)

• **Dressons le tableau de variations de *f* sur I.**

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

$f(0) = 0$

• **Déduisons-en que $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant 0$.**

D'après le tableau de variations, *f* admet un maximum global sur I égal à 0 (obtenu pour $x = 0$).

Donc $\forall x \in \mathrm{I} \quad f(x) \leqslant 0$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1°)

```
Variables :
i et n sont des entiers naturels
u est un réel

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n Faire
    | u prend la valeur u + 1/i
FinPour

Sortie :
Afficher u
```

Donnons la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

On déroule l'algorithme pour $n = 3$.

On obtient $\dfrac{11}{6}$ en sortie.

2°) **Recopions et complétons l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de *n*.**

```
Variables :
i et n sont des entiers naturels
u est un réel

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
u prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n Faire
    | u prend la valeur u + 1/i
FinPour
v prend la valeur u – ln n

Sortie :
Afficher u
```

3°)

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

Formulons des conjectures sur le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$ et son éventuelle convergence.

D'après le tableau, on peut conjecturer que :
- la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante ;
- la suite $\left(u_n\right)$ converge.

Des élèves ont écrit que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante pour n compris entre 4 et 2000, ce que l'on ne peut pas vraiment voir car il manque des valeurs entre 10 et 100, ni entre 100 et 1000.
La conjecture est formulée d'une manière globale.
De même, certains élèves ont dit que l'on pouvait conjecturer que la limite de la suite est 0,577 (ce qui est faux) ou que la limite de la suite est environ égale à 0,577 (ce qui est en effet plausible).

Partie C

1°)

• **Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = f\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)$.**

$$u_{n+1} - u_n = \left[1 + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + ... + \frac{1}{n} - \ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

Or $f\left(-\dfrac{1}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{n+1}$

$$= \ln \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln n - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}$$

• **Déduisons-en le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.**

D'après (1), $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\dfrac{1}{n+1} \neq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f\left(-\dfrac{1}{n+1}\right) < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} < u_n$.
On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est **strictement décroissante à partir de l'indice 1**.

2°) a) $k \in \mathbb{N}^*$

Démontrons que $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Appliquons l'inégalité (1) à $\dfrac{1}{k}$ (on a $\dfrac{1}{k} > -1$).

On a : $f\left(\dfrac{1}{k}\right) \leqslant 0$.

On a donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) - \dfrac{1}{k} \leqslant 0$.

D'où $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

b) **Écrivons les inégalités obtenues en remplaçant successivement k par 1, 2, 3, … n et démontrons que pour tout entier strictement positif n, on a : $\ln(n+1) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$.**

$k = 1 \qquad \ln 2 - \ln 1 \leqslant 1$

$k = 2 \qquad \ln 3 - \ln 2 \leqslant \dfrac{1}{2}$

$k = 3 \qquad \ln 4 - \ln 3 \leqslant \dfrac{1}{3}$

$k = n \qquad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

En ajoutant toutes les inégalités membre à membre, on obtient :

$$\ln(n+1) - \ln 1 \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

soit : $\ln(n+1) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$.

c) **Déduisons-en que pour tout entier strictement positif, on a $u_n \geqslant 0$.**

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln n < \ln(n+1)$.

Par conséquent : $\ln n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$ d'où $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n \geqslant 0$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant 0$.

3°) **Démontrons que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente.**

On a démontré que la suite $\left(u_n\right)$ était strictement décroissante et minorée par 0.
Donc d'après le théorème sur les suites strictement décroissantes et minorées, on peut dire que la suite $\left(u_n\right)$ converge.
Sa limite est appelée la constante d'Euler et est notée assez souvent γ.

Cette constante est environ égale à 0,577.
On ne sait malheureusement rien sur ce nombre, ni s'il est rationnel, ni s'il est irrationnel.

II.

À tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.

$A(4+i)$ $\quad$ $B(4-i)$ $\quad$ $C(-i)$

1°) **Déterminons les affixes des points A', B', C' associés aux points A, B et C.**

$$\begin{aligned} z_{A'} &= \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} \\ &= \frac{4i-1+10-2i}{4+i-2} \\ &= \frac{2i+9}{2+i} \\ &= \frac{(2i+9)\times(2-i)}{(2+i)\times(2-i)} \\ &= \frac{4i+2+18-9i}{4+1} \\ &= \frac{20-5i}{5} \\ &= 4-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{B'} &= \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} \\ &= \frac{4i+1+10-2i}{2-i} \\ &= \frac{2i+11}{2-i} \\ &= \frac{(2i+11)\times(2+i)}{(2-i)\times(2+i)} \\ &= \frac{4i+22-2+11i}{4+1} \\ &= \frac{20+15i}{5} \\ &= 4+3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{C'} &= \frac{i\times(-i)+10-2i}{-i-2} \\ &= \frac{11-2i}{-i-2} \\ &= \frac{(11-2i)(-i-2)}{(-i-2)(i-2)} \\ &= \frac{11i+2-22+4i}{4+1} \\ &= \frac{15i-20}{5} \\ &= 3i-4 \end{aligned}$$

Le point A' a pour affixe $4-i$.

Le point B' a pour affixe $4+3i$.

Le point C' a pour affixe $-4+3i$.

2°) **Vérifions que A', B', C' appartiennent à un cercle Γ' ayant pour centre Ω(i).**

$\Omega A' = |z_{A'} - z_\Omega| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\Omega B' = |z_{B'} - z_\Omega| = |4+3i-i| = |4+2i| = 2\sqrt{5}$

$\Omega C' = |z_{C'} - z_\Omega| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = 2\sqrt{5}$

On en déduit que A', B', C' appartiennent au cercle Γ' de centre Ω(i) et de rayon $2\sqrt{5}$.

3°) Dans toute cette question, on ne repasse pas par l'écriture algébrique (on ne pose pas $z = x+iy$ avec x et y réels). On voit mal en effet ce qu'une telle écriture apporterait pour traiter les questions.

Γ : cercle de centre $S(2)$ et de rayon $\sqrt{5}$

a) $M(z) \in \Gamma$

Démontrons que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

$M(z) \in \Gamma$ donc $|z-2| = \sqrt{5}$

$$\begin{aligned} |z'-i| &= \left| \frac{iz+10-2i}{z-2} - i \right| \\ &= \left| \frac{\cancel{iz}+10\cancel{-2i}\cancel{-iz}\cancel{+2i}}{z-2} \right| \\ &= \frac{10}{|z-2|} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

b) **Déduisons-en à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle Γ.**

$|z'-i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \Omega M' = 2\sqrt{5}$

On en déduit que les points M' associés aux points M du cercle Γ appartiennent au cercle Γ'.

III.

ABCD : tétraèdre
I : milieu de [AB]
J : milieu de [CD]
$\overrightarrow{BK} = \lambda \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AL} = \lambda \overrightarrow{AD}$
$\lambda \in \mathbb{R}$

On rapporte l'espace au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1°) **Déterminons les coordonnées des points I, J, K, L dans ce repère.**

$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $B \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $C \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ $D \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

$I \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ (coordonnées du milieu d'un segment) $\quad$ $J \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ (idem)

$\overrightarrow{BK}=\lambda\overrightarrow{BC}$ d'où $\begin{cases} x_K - x_B = \lambda(x_C - x_B) \\ y_K - y_B = \lambda(y_C - y_B) \\ z_K - z_B = \lambda(z_C - z_B) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_K - 1 = -\lambda \\ y_K - 0 = \lambda\times 1 \\ z_K - 0 = 0 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x_K = 1-\lambda \\ y_K = \lambda \\ z_K = 0 \end{cases}$ donc $K \left| \begin{array}{l} 1-\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{array} \right.$.

$\overrightarrow{AL}=\lambda\overrightarrow{AD}$ d'où $\overrightarrow{AL}=0\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AD}$.

On en déduit que $L \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right.$.

2°) **Démontrons à l'aide des coordonnées que l'on a : $\overrightarrow{IL}=-\overrightarrow{IK}+2\lambda\overrightarrow{IJ}$ (1).**

$\overrightarrow{IJ} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$ $\quad \overrightarrow{IK} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}-\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{array} \right.$ $\quad \overrightarrow{IL} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right.$

$-\overrightarrow{IK}+2\lambda\overrightarrow{IJ} \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2}+\lambda-\lambda=-\frac{1}{2} \\ 0 \\ \lambda \end{array} \right.$ donc $\overrightarrow{IL}=-\overrightarrow{IK}+2\lambda\overrightarrow{IJ}$ (1).

Déduisons-en une propriété pour les points I, J, K, L.

D'après l'égalité (1), les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

Par suite les points, I, J, K, L sont alignés.

3°) M : milieu de [KL]

Démontrons que le point M appartient à la droite (IJ).

(1) donne successivement :

$\overrightarrow{IL}+\overrightarrow{IK}=2\lambda\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MK}=2\lambda\overrightarrow{IJ}$

$2\overrightarrow{IM}+\underbrace{\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MK}}_{\vec{0}}=2\lambda\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IM}=\lambda\overrightarrow{IJ}$ (2)

D'après (2), les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.
On en déduit que le point M appartient à la droite (IJ).

III.

Partie A

Une enquête portant sur un grand nombre de clients d'une grande surface spécialisée en informatique a montré que 80 % des clients avaient bénéficié des conseils d'un vendeur.
De plus, 70 % des clients qui ont bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat alors que 20 % seulement des clients qui n'ont pas bénéficié des conseils d'un vendeur ont effectué un achat.
A : « Le client a effectué un achat »
V : « Le client a bénéficié des conseils d'un vendeur »

1°) **Calculons $P(\mathrm{A})$.**

Les événements V et $\overline{\mathrm{V}}$ constituent un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{A}\cap\mathrm{V})+P(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{V}}) \\ &= P(\mathrm{V})\times P(\mathrm{A}/\mathrm{V})+P(\overline{\mathrm{V}})\times P(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{V}}) \\ &= 0,8\times 0,7+0,2\times 0,2 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

2°) **Calculons $P(\mathrm{V}/\mathrm{A})$.**

$$\begin{aligned} P(\mathrm{V}/\mathrm{A}) &= \frac{P(\mathrm{V}\cap\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} \\ &= \frac{0,8\times 0,7}{0,6} \\ &= \frac{56}{60} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

$$P(\mathrm{V}/\mathrm{A})=\frac{14}{15}$$

Partie B

Le magasin annonce dans sa publicité que 92 % des clients sont satisfaits. Lors d'une enquête auprès de 540 de ses clients, 505 se sont déclarés satisfaits.

1°) **Sous l'hypothèse $p=0,92$, déterminons un intervalle de fluctuation de la fréquence des clients satisfaits au seuil de 95 %.**

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n=540$ et $p=0,92$.

On cherche le plus petit entier naturel a tel que $P(\mathrm{X}\leqslant a)>0,025$.

On cherche le plus petit entier naturel b tel que $P(\mathrm{X}\leqslant b)\geqslant 0,975$.

$a=484$
$b=509$

Donc un intervalle de fluctuation de la fréquence des clients satisfaits au seuil de 95 % est $\left[\dfrac{484}{540}\,;\dfrac{509}{540}\right]$.

Il n'y a pas besoin de simplifier les fractions.

La fréquence des clients satisfaits observée, $\dfrac{505}{540}$, appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % donc on ne rejette pas l'annonce du magasin au risque de 5 % (on ne peut pas penser que la publicité est mensongère).

2°) **Sous l'hypothèse $p=0{,}92$, déterminons un intervalle de fluctuation de la fréquence des clients satisfaits au seuil de 99 %.**

On cherche le plus petit entier naturel a' tel que $P(X \leqslant a') > 0{,}005$.

On cherche le plus petit entier naturel b' tel que $P(X \leqslant b') \geqslant 0{,}995$.

$a'=480$
$b'=512$

Donc un intervalle de fluctuation de la fréquence des clients satisfaits au seuil de 99 % est $\left[\dfrac{480}{540}\,;\dfrac{512}{540}\right]$.

La fréquence des clients satisfaits observée, $\dfrac{505}{540}$, appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 99 % donc on ne rejette toujours pas l'annonce du magasin au risque de 1 %.

Les deux questions dans cet ordre n'avaient pas trop d'intérêt ; il aurait mieux valut intervertir l'ordre.

En effet, la réponse à la première question donnait tout de suite la réponse à la deuxième question.

V.

1°) **$f : x \mapsto \ln(x+1)$**

Déterminons $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^+} \underbrace{(x+1)}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$.

2°) **$g : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$**

Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

On opère un changement de variable.

$X=\dfrac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=2X$

$(x\to-\infty) \quad \Leftrightarrow \quad (X\to-\infty)$

On peut écrire $g(x)=2X\mathrm{e}^X$.

$\lim\limits_{X\to-\infty}\left(X\mathrm{e}^X\right)=0$ (limite de référence)

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

3°) **$h : x \mapsto \dfrac{x(x-1)^2}{2x^3-x+1}$**

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

$$h(x)=\frac{x\left(x^2-2x+1\right)}{2x^3-x+1}$$

$$=\frac{x^3-2x^2+x}{2x^3-x+1}$$

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ est égale au quotient simplifié de ses monômes de plus haut degré

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

Résultat admis : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x+1)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$ (1).

On pose $X = e^x$.

(1) s'écrit $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$ (1').

$$(1') \Leftrightarrow (X+1)(X-1)(X-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = 2$$

Or $X = e^x$.

Donc

$$(1) \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ (impossible) ou } e^x = 1 \text{ ou } e^x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 2$$

$S_1 = \{0 ; \ln 2\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$ (2).

On pose $X = \ln x$.

(2) s'écrit $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$ (2').

$$(2') \Leftrightarrow (X+1)(X-1)(X-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = 2$$

Or $X = \ln x$.

Donc

$$(2) \Leftrightarrow \ln x = -1 \text{ ou } \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \text{ ou } x = e \text{ ou } x = e^2$$

$S_2 = \left\{\frac{1}{e} ; e ; e^2\right\}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x^2+1) = \ln 2 + \ln(x^2 + x - 1)$ (3).

Conditions d'existence :

On doit avoir : $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \quad \text{(toujours vrai)} . \\ x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On résout l'équation (3) dans l'intervalle $\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$.

$$(3) \Leftrightarrow \ln\left[x(x^2+1)\right] = \ln(2x^2 + 2x - 2)$$
$$\Leftrightarrow x(x^2+1) = 2x^2 + 2x - 2$$
$$\Leftrightarrow x^3 + x = 2x^2 + 2x - 2$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2$$

Seules les solutions 1 et 2 conviennent.

$S_3 = \{1 ; 2\}$

II.

1°) Pour tout réel x strictement positif, parmi les cinq expressions suivantes, quelles sont celles qui sont égales ?

$A=\ln\left(x^2\right)+\ln\left(x\right)$ $\quad B=\ln\left(x^2\right)\times\ln\left(x\right)$ $\quad C=\left(\ln\left(x\right)\right)^2+\ln\left(x\right)$ $\quad D=\ln\left(x^2+x\right)$ $\quad E=\ln\left(x\right)\times\left(1+\ln x\right)$

Les seules expressions égales sont les expressions C et E.

$$C=E$$

2°) Parmi les quatre réels suivants, déterminer celui qui est différent des autres.

$A=\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^7}\right)+\dfrac{\mathrm{e}^{\ln 9}}{\mathrm{e}^{\ln 2}}$ $\quad B=\mathrm{e}^{2\ln 3}$ $\quad C=\dfrac{\mathrm{e}^{\ln 3+\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 4}}$ $\quad D=\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right)^3$

$$\begin{aligned}A&=\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^7}\right)+\frac{\mathrm{e}^{\ln 9}}{\mathrm{e}^{\ln 2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^7\right)+\frac{\mathrm{e}^{\ln 9}}{\mathrm{e}^{\ln 2}}\\&=\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\\&=\frac{16}{2}\\&=8\end{aligned}$$

$$B=\mathrm{e}^{\ln\left(3^2\right)}=\mathrm{e}^{\ln 9}=9$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{\mathrm{e}^{\ln 3+\ln 2}}{\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 4}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\ln 6}}{\mathrm{e}^{\ln\frac{3}{4}}}\\&=\frac{6}{\frac{3}{4}}\\&=6\times\frac{4}{3}\\&=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right)^3\\&=2^3\\&=8\end{aligned}$$

Le réel B est le seul différent des autres.

III.

$$f\left(x\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

$\mathcal{C}$: courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$

1°) **Calculons $f\left(x\right)+f\left(-x\right)$ pour tout nombre réel x.**

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\qquad f\left(x\right)+f\left(-x\right)&=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\\&=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\\&=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}}\\&=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\\&=\frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\\&=1\end{aligned}$$

2°)

Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0\\&\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=1\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=0.$$

La limite en $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée.
On est obligé de transformer l'écriture de $f\left(x\right)$.

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}1=1\\&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+1\right)=1\end{aligned}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient }\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=1.$$

Interprétons graphiquement les résultats obtenus.

$\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y=1$ pour asymptote en $+\infty$.

3°) **Dressons le tableau de variations de *f* complet avec les limites.**

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f	0	$\nearrow$	1

4°) **Traçons $\mathcal{C}$.**

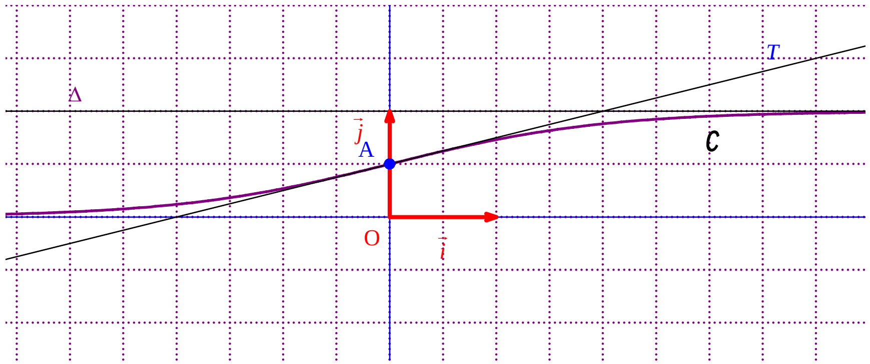
x	-2	$-1{,}9$	$-1{,}8$	$-1{,}7$	$-1{,}6$	$-1{,}5$	$-1{,}4$	$-1{,}3$	$-1{,}2$	$-1{,}1$
$f(x)$	0,12	0,13	0,14	0,15	0,17	0,18	0,20	0,21	0,23	0,25

x	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$
$f(x)$	0,27	0,29	0,31	0,33	0,35	0,38	0,40	0,43	0,45	0,48

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(x)$	0,5	0,52	0,55	0,57	0,60	0,62	0,65	0,67	0,69	0,71

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	0,73	0,75	0,76	0,78	0,80	0,82	0,83	0,85	0,86	0,87	0,88

On trace la droite Δ asymptote à $\mathcal{C}$.



5°) **Déterminons une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.**

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

Corrigé de la partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques

I.

$(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$

$\text{PGCD}(a\,;b) = 1$

Le but de l'exercice est de démontrer que $\text{PGCD}(a\,;bc) = \text{PGCD}(a\,;c)$.

1°) Soit d un diviseur commun à a et à bc.

Démontrons que d est un diviseur de PGCD(ac ; bc).

d est un diviseur commun à a et à bc.
Donc d est un diviseur commun à ac et à bc.
Par suite, d est un diviseur de leur PGCD.
Donc $d \mid \text{PGCD}(ac\,;bc)$.

Déduisons-en que d est un diviseur commun à a et à c.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(ac\,;bc) &= c\times\text{PGCD}(a\,;b)\\ &= c \text{ car } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux}\end{aligned}$$

Donc d divise c.
De plus, d divise a par hypothèse.
On en déduit que d est un diviseur commun à a et à c.

2°) **Démontrons que si d' est un diviseur commun à a et à c, alors d' est un diviseur commun à a et à bc.**

Considérons un entier d' diviseur commun à a et à c.
Démontrons qu'alors d' est un diviseur commun à a et à bc.

$d' \mid c$ donc $d' \mid bc$.

$d' \mid a$ par hypothèse

Donc d' est un diviseur commun à a et à bc.

3°) **Concluons.**

On a démontré que :

d un diviseur commun à a et à bc si et seulement si d est un diviseur commun à a et c.

Donc l'ensemble des diviseurs communs à a et à bc est égal à l'ensemble des diviseurs communs à a et c.

Les deux ensembles ont donc le même plus grand élément.

On en déduit que $\text{PGCD}(a\,;bc) = \text{PGCD}(a\,;c)$.

II.

$a = n^2 + 1$ et $b = n(n^2 - 1)$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$d = \text{PGCD}(a\,;b)$

1°) **Démontrons que a et n sont premiers entre eux.**

On a $1\times(n^2+1) - n\times n = 1$.

Comme 1 et $-n$ sont des entiers relatifs, on en déduit d'après le théorème de Bezout que a et n sont premiers entre eux.

2°) **Déduisons-en que l'on a $d = \text{PGCD}(a\,;n^2-1)$.**

$$\begin{aligned}d &= \text{PGCD}(a\,;b)\\ &= \text{PGCD}(n^2+1\,;n(n^2-1))\\ &= \text{PGCD}(a\,;n^2-1))\end{aligned}$$

(on utilise le résultat de l'exercice **I** car a et n sont premiers entre eux)

3°)

Donnons une combinaison linéaire à coefficients entiers de a et n^2-1 indépendante de n.

$a - (n^2 - 1) = 2$

Déduisons-en les valeurs possibles de d.

On sait que $d = \text{PGCD}(a\,;n^2-1)$.

Donc d divise tout combinaison linéaire à coefficients entiers de a et de n^2-1.
En particulier, d divise leur différence donc d divise 2.
Comme $d > 0$, on en déduit que $d = 1$ ou $d = 2$.

4°) **Déterminons la valeur de d suivant la parité de n.**

Si n est pair, alors n^2 est pair donc n^2+1 et n^2-1 sont impairs donc 2 n'est pas un diviseur commun de a et n^2.
On en déduit que $d = 1$.

Si n est impair, alors n^2 est impair donc n^2+1 et n^2-1 sont pairs donc 2 est un diviseur commun de a et n^2.
On en déduit que $d = 2$.