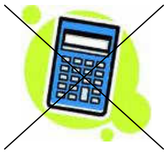
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 13 mai 2013 (30 min)



- L’usage de la calculatrice est interdit.
- On détaillera tous les calculs sur la copie.

I. (10 points)

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$ (valeurs exactes).

II. (10 points)

Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ (valeurs exactes).

Corrigé du contrôle du 13-5-2013

I. Calculons $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

1[ère] méthode :

On écrit : $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ (astuce de départ).
On utilise les formules d'addition pour le cosinus et pour le sinus.

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$ (valeur exacte)

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$ (valeur exacte)

On peut vérifier ces valeurs à l'aide de la calculatrice TI 83 Premium CE.

Autre méthode possible :

On peut aussi utiliser la décomposition $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$.

2^e méthode :

On utilise l'égalité $2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2} \quad \text{(formule } \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\text{)}$$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} \quad \left(\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ : valeur remarquable}\right)$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Or $\frac{\pi}{12}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{12}\geqslant 0$.

Donc

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{(valeur exacte)}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2} \quad \text{(formule } \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}\text{)}$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}$$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Or $\frac{\pi}{12}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{12}\geqslant 0$.

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} \quad \text{(valeur exacte)}$$

On peut démontrer l'égalité des valeurs trouvées avec les deux méthodes.

II. Calculons $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

On part de l'égalité $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$ et l'on utilise les formules de duplication.

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$$

Formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=2\times\cos^2\frac{\pi}{8}-1$$

$$2\times\cos^2\frac{\pi}{8}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

Donc $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

D'où

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$ (valeur exacte)

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$$

Formule $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\times\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$2\times\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Donc $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or $\frac{\pi}{8}\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{8}\geqslant 0$.

Donc

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$ (valeur exacte)

On pourrait aussi utiliser la relation $\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$ pour calculer $\sin\frac{\pi}{8}$ à partir de $\cos\frac{\pi}{8}$.

Il est intéressant de noter qu'un logiciel de calcul formel ne donnera pas forcément ces valeurs exactes (XCas ne les donne pas alors qu'une calculatrice TI89 les donnera).