Problème

I. 1°) On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = x - \ln x$.
Étudier le sens de variation de φ sur $]0 ; +\infty[$ et préciser le signe de $\varphi(x)$.

2°) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x}$.

Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation de f.

3°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4°) On veut démontrer que quel que soit x appartenant à $]0 ; 1[$ on a $f(x) > x$.

a) Démontrer que $f(x) - x$ est du signe de $g(x)$ où $g(x) = x\ln x - x^2 + 1$.

b) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ puis dresser le tableau de variation de g' sur $]0 ; 1[$.

Démontrer que g' est négative sur $]0 ; 1[$.

c) En déduire le sens de variation de g et le signe de $g(x)$ sur $]0 ; 1[$. Conclure.

II. On considère la suite (u_n) définie ainsi : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n > 0$.

2°) Démontrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$ en utilisant les résultats du **I.** 2°). En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

3°) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4°) Donner une interprétation graphique de u_n.

On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ où $n \geqslant 1$.

Définir S_n sous forme d'une intégrale et donner une interprétation graphique de S_n.

5°) Démontrer que quel que soit $t > 1$ on a $f(t) > \dfrac{1}{t}$ puis que pour tout $n > 1$, on a : $S_n > \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire la limite de S_n.

III. On considère la suite (v_n) définie ainsi : pour tout n entier naturel on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n - \ln(v_n)}$ et v_0 appartient à $]0 ; +\infty[$.

1°) Démontrer que (v_n) est une suite constante lorsque $v_0 = 1$.

2°) On se place dans le cas $v_0 \neq 1$.

a) Démontrer que : $0 < v_1 < v_2 < 1$.

b) Puis démontrer, par une démonstration par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $v_n \in]0 ; 1[$.

Démontrer que (v_n) est croissante.

c) En déduire que (v_n) est convergente.

d) Conjecturer la limite de (v_n) en précisant comment vous avez obtenu cette conjecture.