Des suites convergeant vers e

I. On définit les suites (u_n) et (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 1$.

1°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2°) Calculer u_7 et v_7 ; en déduire une valeur approchée de la limite commune l à ces deux suites au millième.
3°) Prouver que l est irrationnel.

Indication : Par l'absurde, supposer que $l = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers naturels non nuls. Utiliser l'encadrement $u_q < l < v_q$ et remarquer que $q!u_q \in \mathbb{N}$.

4°) Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ et h la fonction définie sur [0 ; 1] par $h(x) = g(x) + \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}$.

a) Étudier les variations de g et h sur [0 ; 1].
b) En déduire que $u_n < \mathrm{e} < u_n + \frac{1}{n!} = v_n$.
c) Déduire de ce qui précède que l = e.
On a donc démontré que les suites (u_n) et (v_n) convergeaient vers un irrationnel e.

II. Soit (w_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1°) Soit φ la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$.
En étudiant les variations de φ, établir l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$.

2°) En déduire que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ puisque $w_n \leqslant \mathrm{e}$ pour $n \geqslant 1$.

3°) Vérifier que $-\frac{1}{n+1} \in]-1 ; 0[$ pour $n \geqslant 1$ puis démontrer que $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$.

En déduire que $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n+1}$ puis $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \mathrm{e}$ pour $n \geqslant 1$.

4°) Déduire de ce qui précède que pour $n \geqslant 1$, on a : $w_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)w_n$.

En déduire la limite de w_n lorsque n tend vers l'infini.

III. Comparaison de la convergence des deux suites (u_n) et (w_n)

Des questions **I.** 4°) b) et **II.** 4°) déduire que $0 \leqslant \mathrm{e} - w_n \leqslant \frac{3}{n}$ et $0 < \mathrm{e} - u_n < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Quel est à votre avis la suite qui converge le plus rapidement vers e ? Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsque l'on remplace e par u_n ? e par w_n ?
Programmer chacune des suites sur votre calculatrice et vérifier vos allégations.

n	1	2	3	4	5	…
u_n						…
w_n						…