TS1

Contrôle du jeudi 25 avril 2013 (4 h)

Partie commune (3 heures)

I. (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(2 ; 4 ; 1), B(0 ; 4 ; – 3), C(3 ; 1 ; – 3), D(1 ; 0 ; – 2), E(3 ; 2 ; – 1), $\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{5}\,;4\,;-\dfrac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Chaque réponse exacte rapporte un point ; chaque réponse fausse enlève un point.
Aucun point n'est ajouté ou retranché en l'absence de réponse.

1°) Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x+2y-z-11=0$.

2°) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3°) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4°) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

5°) Le point I est sur la droite (AB).

II. (5 points)

Les candidats à un oral de concours s'enregistrent pour vérifier que la durée de leur exposé est conforme au règlement de ce concours. Chaque candidat peut s'exprimer soit en français, soit en anglais. On sait que :
80 % des candidats interrogés s'expriment en français,
18,6 % des candidats interrogés font un exposé en anglais de durée conforme au règlement,
83 % des candidats qui s'expriment en français ont un exposé de durée conforme au règlement.
On interroge au hasard un candidat ; chaque candidat a la même probabilité d'être interrogé.

On donnera les probabilités arrondies au millième le cas échéant (sauf pour la question 3°) de la **partie C**).

Partie A

1°) Calculer la probabilité que la durée de l'exposé soit conforme au règlement.
On pourra utiliser les événements E : « la durée de l'exposé est conforme au règlement » et F : « l'exposé est en français ».

2°) La durée est conforme au règlement. Quelle est la probabilité que cet exposé soit en anglais ?

Partie B

La durée de l'exposé est conforme au règlement du concours si elle est comprise entre 535 et 665 secondes.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque candidat associe la durée de son exposé en secondes. On suppose que X suit la loi normale d'espérance 600 et d'écart-type 30.

1°) Calculer la probabilité qu'un exposé choisi au hasard soit de durée convenable.

2°) Calculer la probabilité qu'un exposé choisi au hasard soit de durée trop courte pour être recevable.

3°) Quelle est la durée minimale, à une seconde près, des 10 % d'exposés les plus longs ?

4°) Déterminer l'intervalle fermé I, centré sur 600, tel que $P\left(\mathrm{X}\in\mathrm{I}\right)=0,9$. On arrondira les bornes au millième.

Partie C

On admet dans cette partie que 85 % des exposés sont de durée convenable. On choisit au hasard 30 enregistrements.
Le nombre d'enregistrements est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce choix à un tirage avec remise de 30 enregistrements.
Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'exposés, parmi les 30, dont la durée est convenable.

1°) Quelle est la loi de Y ? Préciser ses paramètres.

2°) Quelle est la probabilité qu'exactement 20 des 30 enregistrements soient de durée convenable ?

3°) Quelle est la probabilité qu'au plus la moitié des enregistrements soit de durée convenable ?

III. (5 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $J_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer I_n et J_n.

1°) a) Soit n un entier naturel fixé.

Démontrer que pour tout réel $x\in[0\,;1]$, on a : $0\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2°) a) Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.

a) Démontrer que pour tout réel $x\in[0\,;1]$, on a : $f_n'(x)=-nf_n(x)-\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant1$, on a : $I_n=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-J_n\right)$.

c) Déterminer à l'aide de la question b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right)$.

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (2 points)

On pose $\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

1°) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin x$. En déduire la valeur de $\mathrm{I} + \mathrm{J}$.

2°) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$. En déduire la valeur de $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.

3°) Calculer I et J.

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Partie A

1°) Étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x$ (sans les limites) ; en déduire le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2°) Déterminer le sens de variation de f (sans les limites).

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de $\mathrm{I} = \int_1^3 f(x) \, \mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq 0$, on a : $f(x) = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

2°) Démontrer que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

3°) En déduire que l'on a $a \leqslant \mathrm{I} \leqslant 3a$ avec $a = \ln\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}}{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}}\right)$.

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

I. (2 points)

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :
- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A,
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B,
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau, 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :
A l'état « l'adhérent choisit le niveau A »,
B l'état « l'adhérent choisit le niveau B »,
C l'état « l'adhérent choisit le niveau C ».

Pour n entier naturel, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année 2010 + n.
Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$.

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1°) Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
Écrire sans expliquer la matrice de transition M en ligne de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2°) Une seule des trois matrices Q, R, S ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.
Indiquer laquelle en expliquant.

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$

Le président de l'association affirme qu'environ 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

II. (3 points)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit désigné respectivement A et B.
Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.
L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.
Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent A et les autres préfèrent B.
Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant A et 15 % des personnes préférant B changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice colonne $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère le produit A la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère le produit B la semaine n.

1°) a) Déterminer la matrice M telle que pour tout entier naturel n, on ait $P_{n+1} = MP_n$.

b) Calculer P_7 (on donnera des valeurs arrondies au centième des coefficients).

2°) Le fabricant de parfum qui a lancé la campagne estime qu'en fait chaque semaine seuls 80 % des consommateurs voient leur comportement influencé comme ci-dessus par la publicité. Les 20 % restants choisissent de façon équiprobable les deux parfums.

a) Établir pour n entier naturel quelconque une relation entre P_{n+1} et P_n faisant intervenir la matrice M et la matrice colonne $N = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

b) Si les conditions initiales sont celles du début de l'énoncé, déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'état probabiliste des choix de parfums après 4 semaines de publicité (arrondir les résultats au millième).

Corrigé du contrôle du 25-4-2013

I.

Affirmation	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)
Réponse	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Vrai

4°)

On peut utiliser un système d'équations paramétriques de (AB) : $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Avec les coordonnées de I, on observe qu'il n'y a pas de solutions.

On peut aussi chercher si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires.

II.

D'après l'énoncé, on a :
$P(\mathrm{F}) = 0{,}8$
$P(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{E}) = 0{,}186$
$P(\mathrm{E/F}) = 0{,}83$
Il est inutile de faire un arbre car il manque des données.

1°) **Calculons $P(\mathrm{E})$.**

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{E}) &= P(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) + P(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{E}) \\ &= P(\mathrm{E/F}) \times P(\mathrm{F}) + P(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{E}) \\ &= 0{,}83 \times 0{,}8 + 0{,}186 \\ &= 0{,}85 \end{aligned}$$

2°) **Calculons $P(\overline{\mathrm{F}} / \mathrm{E})$.**

$$\begin{aligned} P(\overline{\mathrm{F}} / \mathrm{E}) &= \frac{P(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{E})}{P(\mathrm{E})} \\ &= \frac{0{,}186}{0{,}85} \end{aligned}$$

$P(\overline{\mathrm{F}} / \mathrm{E}) \approx 0{,}219$ (valeur arrondie au millième)

Partie B

X suit la loi normale d'espérance 600 et d'écart-type 30.

1°) **Calculons $P(535 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 665)$.**

$P(535 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 665) \approx 0{,}970$

2°) **Calculons $P(\mathrm{X} \leqslant 535)$.**

$P(\mathrm{X} \leqslant 535) \approx 0{,}015$

3°) **Déterminons le réel u tel que $P(\mathrm{X} \geqslant u) = 0{,}1$.**

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X} \geqslant u) = 0{,}1 &\Leftrightarrow 1 - P(\mathrm{X} \leqslant u) = 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow P(\mathrm{X} \leqslant u) = 0{,}9 \end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve $u = 638{,}447\ldots$ donc $u \approx 638$ (valeur arrondie à l'unité).

Donc la durée minimale des 10 % exposés les plus longs est de 638 secondes environ.

4°) **Déterminons l'intervalle fermé I, centré sur 600, tel que $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = 0{,}9$.**

On pose $\mathrm{I} = [600 - c\,;\, 600 + c]$.

On cherche c tel que $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = 0{,}9$ (1).

(1) donne $P(\mathrm{X} < 600 - c) = 0{,}05$ (symétrie de la densité de X).

Avec la calculatrice on obtient : $600 - c = 550{,}654391222...$

D'où $600 + c = 649{,}345608777...$

$\mathrm{I} = [550{,}654\,;\, 649{,}346]$ (arrondi au millième)

Autre façon :

On cherche a et b tel que $P(\mathrm{X} \leqslant a) = \frac{1 - 0{,}9}{2}$ et $P(\mathrm{X} \leqslant b) = 0{,}9 + \frac{1 - 0{,}9}{2}$

$a = 550{,}654391222\ldots$
$b = 649{,}345608777\ldots$

Partie C

1°) **Déterminons la loi suivie par Y.**

La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres 30 (nombre de répétitions) et 0,85 (probabilité d'un succès).

2°) **Calculons $P\left(\mathrm{Y}=20\right)$.**

$$\begin{aligned}P\left(\mathrm{Y}=20\right)&=\binom{30}{20}\times 0{,}85^{20}\times 0{,}15^{10}\\&=0{,}006715270\ldots\end{aligned}$$

$$P\left(\mathrm{Y}=20\right)\approx 0{,}007$$

3°) **Calculons $P\left(\mathrm{Y}\leqslant 15\right)$.**

$$P\left(\mathrm{Y}\leqslant 15\right)=0{,}000007078273$$
$$P\left(\mathrm{Y}\leqslant 15\right)\approx 7\times 10^{-6}$$

III.

$$I_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\ ;\ J_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

1°) a) **Démontrons que $0\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.**

$n\in\mathbb{N}$

Pour tout réel $x\in[0\,;1]$, on a : $0<1\leqslant 1+x\leqslant (1+x)^2$.

Donc $0\leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2}\leqslant \dfrac{1}{1+x}\leqslant 1$ par passage à l'inverse dans l'inégalité (tous les nombres sont strictement positifs).

Par suite, $0\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ (car $\mathrm{e}^{-nx}>0$).

Une méthode possible consiste à procéder par différence.

b) **Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, on a $\forall x\in[0\,;1]$ $0\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.

Donc par croissance de l'intégrale (comme les bornes sont dans le bon sens),

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \text{ soit } 0\leqslant J_n\leqslant I_n\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x\,.$$

Or pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right]_0^1=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $0\leqslant J_n\leqslant I_n\leqslant \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ (attention pour la méthode des gendarmes : $n\in\mathbb{N}^*$)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n=0$.

2°) a) $f_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$ $(x\in[0\,;1])$

a) **Démontrons que $\forall x\in[0\,;1]$ $f_n{}'(x)=-nf_n(x)-\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}$.**

$$\begin{aligned}\forall x\in[0\,;1]\quad f_n{}'(x)&=\frac{-n\mathrm{e}^{-nx}(1+x)-\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\\&=-n\times\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\\&=-nf_n(x)-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\quad (1)\end{aligned}$$

b) **Déduisons-en que $\forall n\geqslant 1$ $I_n=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-J_n\right)$.**

(1) donne $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(-f_n{}'(x)-\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\right)$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{n}\left(-f_n{}'(x) - \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 \left(-f_n{}'(x) - \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n}\left(\int_0^1 -f_n{}'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left[-f_n(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(f_n(0) - f_n(1) - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right) \quad (2)$$

c) **Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$.**

(2) donne $nI_n = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = 1$.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

1°) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin x$

• Calculons $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x$

• Déduisons-en la valeur de I + J.

$$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi f'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[f(x)\right]_0^\pi$$
$$= \mathrm{e}^\pi \times \sin\pi - \mathrm{e}^0 \times \sin 0$$
$$= \mathrm{e}^\pi \times 0 - \mathrm{e}^0 \times 0$$
$$= 0$$

2°) $g : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$

• Calculons $g'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \mathrm{e}^x \cos x - \mathrm{e}^x \sin x$

• Déduisons-en la valeur de I – J.

$$\mathrm{I}-\mathrm{J} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \left(\mathrm{e}^x \cos x - \mathrm{e}^x \sin x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi g'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[g(x)\right]_0^\pi$$
$$= \mathrm{e}^\pi \times \cos\pi - \mathrm{e}^0 \times \cos 0$$
$$= \mathrm{e}^\pi \times (-1) - \mathrm{e}^0 \times 1$$
$$= -\mathrm{e}^\pi - 1$$

2°) **Déduisons-en les valeurs exactes de I et de J.**

On a $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ donc $\mathrm{J} = -\mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

Par suite, $2\mathrm{J} = \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

D'où $\mathbf{J} = \dfrac{\mathbf{e}^{\pi} + 1}{2}$.

Par suite, on a : $\mathbf{I} = -\dfrac{\mathbf{e}^{\pi} + 1}{2}$.

II.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

Partie A

1°) **Étudions les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - 1 - x\mathrm{e}^{x}$; déduisons-en le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.**

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(x) = -x\mathrm{e}^{x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $-x$		$+$	0	$-$	
Signe de e^{-x}		$+$		$+$	
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ		$\nearrow$	0	$\searrow$	
Signe de $\varphi(x)$		$-$	0	$-$	

2°) **Déterminons le sens de variation de *f*.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f'(x) = \frac{1 \times (\mathrm{e}^{x} - 1) - x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{x} - 1 - x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^2} = \frac{\varphi(x)}{(\mathrm{e}^{x} - 1)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\varphi(x)$		$-$	0	$-$	
Signe de $(\mathrm{e}^{x} - 1)^2$		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$		
Variations de f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Partie B

$$\mathrm{I} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

1°) **Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.**

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f(x) &= \frac{x}{\mathrm{e}^{x} - 1} \\
&= \frac{x \times \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{x} - 1) \times \mathrm{e}^{-x}} \\
&= x \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}} \\
&= x \times \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}
\end{aligned}$$

2°) **Démontrons que si $1 \leqslant x \leqslant 3$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.**

On part de $1 \leqslant x \leqslant 3$.

On a : $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} > 0$ donc $1 \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leqslant x \times \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leqslant \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

Par suite, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$.

3°) **En déduire que l'on a : $a \leqslant \mathrm{I} \leqslant 3a$ avec $a = \ln\left(\dfrac{1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}}{1 - \frac{1}{\mathrm{e}}}\right)$.**

D'après l'inégalité précédente, on a : $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^3 \frac{3\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^3 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx=\left[\ln\left(1-e^{-x}\right)\right]_1^3=\ln\left(1-e^{-3}\right)-\ln\left(1-e^{-1}\right)=\ln\left(\frac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$$

$$\int_1^3 \frac{3e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx=3\int_1^3 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx=3\ln\left(\frac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$$

$a \leqslant \mathrm{I} \leqslant 3a$ avec $a=\ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{e^3}}{1-\frac{1}{e}}\right)$.

Corrigé de la partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques

I.

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :
- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A,
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B,
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau, 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C,

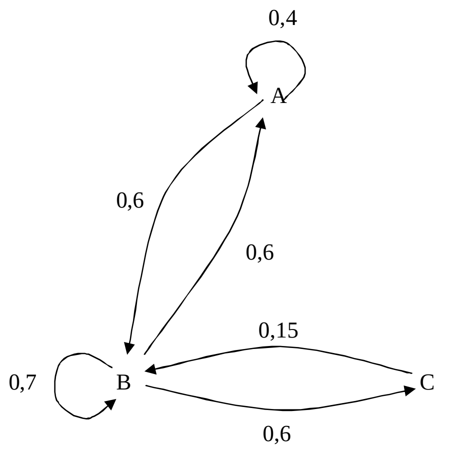
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :
A l'état « l'adhérent choisit le niveau A »,
B l'état « l'adhérent choisit le niveau B »,
C l'état « l'adhérent choisit le niveau C ».

Pour n entier naturel, on note $\mathrm{P}_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année 2010 + n.
Ainsi $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix}0,2 & 0,7 & 0,1\end{pmatrix}$.

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1°) **Représentons cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.**
Écrivons la matrice de transition M en ligne de ce graphe probabiliste.



La matrice de transition en ligne est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

2°) **Déterminons l'état stable parmi les matrices Q, R, S.**

$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$$MQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,4 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{29}{60} & \frac{19}{60} \end{pmatrix}$$ (on effectue les calculs en valeur exacte)

$MQ \neq Q$ donc la matrice Q n'est pas l'état stable.

$$MR = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$= R$$

$MR = R$ donc la matrice R est l'état stable.

$$MS = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

On a : $MS \neq S$ donc la matrice S n'est pas l'état stable.

La matrice R est donc l'état probabiliste stable.

Autre façon (pas satisfaisante) :

On regarde ce qui se passe au bout d'un nombre élevé d'années avec la calculatrice.

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 20$	$n = 100$
a_n	0,22	0,1895…	0,1672…	0,1666…
b_n	0,625	0,5440…	0,5011…	0,5
c_n	0,155	0,2663…	0,3315…	0,33333…

On voit que c'est la matrice R qui semble être l'état stable.

La matrice R correspond à la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$.
Donc lorsque n devient de plus en plus grand, la proportion d'adhérents qui choisissent le niveau B devient de plus en plus proche de $\frac{1}{2}$ (la proportion d'adhérents qui choisissent le niveau A devient de plus en plus proche de $\frac{1}{6}$, la proportion d'adhérents qui choisissent le niveau C devient de plus en plus proche de $\frac{1}{3}$).

On peut donc considérer que l'affirmation du président de l'association est correcte.

Autre méthode pour la détermination de l'état stable :

On pourrait très bien également déterminer directement l'était stable.

On pose $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ la matrice ligne qui correspond à l'état probabiliste stable.

On a : $x + y + z = 1$.

De plus $EM = M \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,4x + 0,2y & 0,6x + 0,7y + 0,15z & 0,1y + 0,85z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x + 0,2y = x \\ 0,6x + 0,7y + 0,15z = y \\ 0,1y + 0,85z = z \end{cases}$$

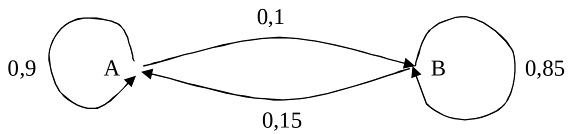
On résout le système $\begin{cases} 0,4x+0,2y=x \\ 0,6x+0,7y+0,15z=y \\ 0,1y+0,85z=z \\ x+y+z=1 \end{cases}$ avec la calculatrice.

On retrouve la matrice R.

II.

1°) a) **Déterminons la matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{MP}_n$.**

La situation peut être représenté par le graphe probabiliste suivant :



La matrice de transition en colonne est $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{P}_{n+1}=\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{n+1}=0,9a_n+0,15b_n \\ b_{n+1}=0,85b_n+0,1a_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+1} &= \begin{pmatrix} 0,9a_n+0,15b_n \\ 0,85b_n+0,1a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}\mathrm{P}_n \\ &= \mathrm{MP}_n \end{aligned}$$

Donc

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{MP}_n$

b) **Calculons P_7.**

On a la relation $\mathrm{P}_n=\mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$ pour tout entier naturel *n*.

D'après les conditions initiales précisées dans l'énoncé, on a : $\mathrm{P}_0=\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{P}_7=\mathrm{M}^7\times\mathrm{P}_0$$

$$\mathrm{P}_7=\begin{pmatrix} 0,547 \\ 0,453 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_7\approx\begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

2°)

a) **Établissons pour *n* entier naturel quelconque une relation entre P_{n+1} et P_n faisant intervenir la matrice M et la matrice colonne $\mathrm{N}=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.**

$$\mathrm{P}_{n+1}=0,8\mathrm{MP}_n+0,2\mathrm{N}$$

b) **Déterminons l'état probabiliste des choix de parfums après 4 semaines de publicité.**

On effectue les calculs de proche en proche (en utilisant la touche permettant de reprendre le résultat précédent).

Il n'y a pas de formule explicite possible.

$$\mathrm{P}_1=\begin{pmatrix} 0,34 \\ 0,66 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_2=\begin{pmatrix} 0,424 \\ 0,576 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_3=\begin{pmatrix} 0,4744 \\ 0,5256 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_4=\begin{pmatrix} 0,50464 \\ 0,49536 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{P}_4\approx\begin{pmatrix} 0,505 \\ 0,495 \end{pmatrix}$ (valeurs arrondies au millième)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_4 &= 0,8\mathrm{MP}_3+0,2\mathrm{N} \\ &= 0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{MP}_2+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N} \\ &= 0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{MP}_1+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N} \\ &= 0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{M}\left(0,8\mathrm{MP}_0+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N}\right)+0,2\mathrm{N} \end{aligned}$$