TS1

Contrôle du jeudi 11 avril 2013 (45 minutes)

Prénom : …………………………………………… **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (2 points)

Démontrer que la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est une fonction de densité sur [1 ; e].

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

II. (1 point)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; a]$ $(a > 0)$ par $f(x)=2\mathrm{e}^{-x}$.
Déterminer a tel que f soit une densité de probabilité sur $[0 ; a]$.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

III. (4 points)

X est une variable aléatoire à densité sur [3 ; 10]. On donne $P(X < 5) = 0{,}6$.

Compléter directement sans détailler les calculs :

$P(X = 5)$ = ……… ; $P(X \leqslant 5)$ = ……… ; $P(X > 5)$ = ……… ; $P(5 < X < 10)$ = ……… .

IV. (5 points)

Soit X une variable aléatoire admettant une fonction f pour densité de probabilité sur [0 ; 5].

On donne $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}22$ et $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}18$.

Compléter directement sans détailler les calculs :

$P(X \leqslant 2)$ = ……… ; $P(4 < X < 5)$ = ……… ; $P(X > 2)$ = ……… ; $P(X \leqslant 4)$ = ……… ;

$P(2 < X < 4)$ = ………

V. (2 points)

Lisa arrive toujours au lycée en avance. Son temps d'attente en minutes avant la sonnerie peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur [5 ; 20].

1°) Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente de Lisa avant la sonnerie soit compris entre 5 et 10 minutes ? Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

2°) Quel est le temps moyen d'attente de Lisa avant la sonnerie ?

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

VI. (6 points)

Dans une fabrique de boissons, une machine remplit automatiquement avec du soda des bouteilles de 51 centilitres.
Pour pouvoir être commercialisée, une bouteille doit contenir au moins 48 centilitres de soda.

Partie A

La quantité de soda en centilitres fournie par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

Arrondir les probabilités au millième. On ne demande pas le détail des calculs.

1°) Calculer P (X$\geqslant$ 48). En déduire le pourcentage de bouteilles qui pourront être commercialisées.

2°) Calculer P (X < 51). Que peut-on en déduire concrètement ?
3°) Calculer P (X > 48 / X < 51).

Partie B

Le temps de fonctionnement sans panne, en jours, de cette machine est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1°) On sait que P (Y < 30) = 0,44. En déduire la valeur de λ (valeur exacte).
2°) Calculer la probabilité que la machine fonctionne plus de 60 jours (valeur arrondie au millième).
3°) Calculer E(Y) (valeur exacte puis valeur arrondie au dixième).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 11-4-2013

I.

f est définie, continue et positive ou nulle sur [1 ; e].

$\forall\, x \in [1\,;\,\mathrm{e}] \quad f(x) \geqslant 0$

$$\int_0^{\mathrm{e}} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \left[\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1$$

Donc f est une fonction de densité sur [1 ; e].

II.

$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} \quad (x \in [0\,;\,a])$

Déterminons a tel que f soit une densité de probabilité sur [0 ; a].

$\forall\, x \in [0\,;\,a] \quad f(x) \geqslant 0$

f est continue sur l'intervalle [0 ; a].

$$\int_0^{a} 2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \left[-2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{a} = -2\mathrm{e}^{-a} + 2$$

$$\int_0^{a} 2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = 1 \ \ (1)$$

$(1) \Leftrightarrow -2\mathrm{e}^{-a} + 2 = 1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a = \ln 2$

III.

X est une variable aléatoire à densité sur [3 ; 10]. On donne $P(X < 5) = 0{,}6$.

Complétons directement sans détailler les calculs :

$P(X = 5) =$ **0** ; $P(X \leqslant 5) =$ **0,6** ; $P(X > 5) =$ **0,4** ; $P(5 < X < 10) =$ **0,4**.

IV.

Soit X une variable aléatoire admettant une fonction f pour densité de probabilité sur [0 ; 5].

On donne $\displaystyle\int_0^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = 0{,}22$ et $\displaystyle\int_4^{5} f(x)\ \mathrm{d}x = 0{,}18$.

$P(X \leqslant 2) =$ **0,22** ; $P(4 < X < 5) =$ **0,18** ; $P(X > 2) =$ **0,78** ; $P(X \leqslant 4) =$ **0,82** ; $P(2 < X < 4) =$ **0,6**

V.

X : temps d'attente en minutes avant la sonnerie

X suit la loi $\mathbf{U}([5\,;\,20])$.

1°) **Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente de Lisa avant la sonnerie soit compris entre 5 et 10 minutes ?**

$$\begin{aligned} P(5 \leqslant X \leqslant 10) &= \frac{10-5}{20-5} \\ &= \frac{5}{15} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2°) **Quel est le temps moyen d'attente de Lisa avant la sonnerie ?**

$$\mathrm{E}(X) = \frac{5+20}{2} = 12{,}5$$

Le temps moyen d'attente de Lisa avant la sonnerie est de 12,5 minutes.

VI.

Dans une fabrique de boissons, une machine remplit automatiquement avec du soda des bouteilles de 51 centilitres.
Pour pouvoir être commercialisée, une bouteille doit contenir au moins 48 centilitres de soda.

Partie A

La quantité de soda en centilitres fournie par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.

On ne s'étonnera pas de l'énoncé qui modélise la quantité de soda (positive ou nulle) par une loi continue sur $\mathbb{R}$.

En effet, on peut vérifier par le calcul que la probabilité que $X \leqslant 0$ est quasiment nulle.

1°)

Calculons $P\,(X \geqslant 48)$.

$P\,(X \geqslant 48) = 0{,}9522096696402...$

$P\,(X \geqslant 48) \approx 0{,}952$ (valeur arrondie au millième)

Déduisons-en le pourcentage de bouteilles qui pourront être commercialisées.

Le pourcentage de bouteilles qui pourront être commercialisées est environ égal à 95,2 %.

2°) **Calculons $P\,(X < 51)$. Que peut-on en déduire concrètement ?**

$P\,(X < 51) = 0{,}797671675414...$

On en déduit que 20,2 % des bouteilles environ déborderont lors du remplissage et sont remplies au maximum.

3°) **Calculons $P\,(X > 48 \,/\, X < 51)$.**

$$P\,(X > 48 \,/\, X < 51) = \frac{P(48 < X < 51)}{P(X < 51)} \quad \text{(formule de la probabilité conditionnelle d'un événement)}$$
$$= 0{,}9400877180013\ldots$$

$P\,(X > 48 \,/\, X < 51) \approx 0{,}940$ (valeur arrondie au millième)

Partie B

Le temps de fonctionnement sans panne, en jours, de cette machine est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1°) On sait que $P\,(Y < 30) = 0{,}44$.

Calculons la valeur de λ.

$P\,(Y < 30) = 0{,}44 \quad (1)$

(1) donne :

$$1 - e^{-30\lambda} = 0{,}44$$

$$e^{-30\lambda} = 0{,}56$$

$$\lambda = -\frac{\ln 0{,}56}{30}$$

2°) **Calculons la probabilité que la machine fonctionne plus de 60 jours.**

$$\begin{aligned} P(Y > 60) &= e^{-\lambda \times 60} \\ &= e^{\frac{\ln 0{,}56}{30} \times 60} \\ &= e^{2\ln 0{,}56} \end{aligned}$$

$P\,(Y > 60) \approx 0{,}314$ (valeur arrondie au millième)

3°) **Calculons E(Y).**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{\lambda} \\ &= -\frac{30}{\ln 0{,}56} \end{aligned}$$

$E(Y) \approx 51{,}7$ (valeur arrondie au dixième)