

Soit n un entier naturel non nul.

1°) On considère l'équation $3x + 7y = 10^{2n}$ (E) où x et y sont des entiers relatifs.

a) Déterminer un couple $(u ; v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière de (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de (E).

2°) On considère l'équation $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ (F) où x et y sont des entiers relatifs.

a) Démontrer que $100 \equiv 2 \pmod{7}$. Démontrer que si $(x ; y)$ est solution de (F) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$.

b) Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

c) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que (F) n'admet pas de solution.