# TS Exercices sur la géométrie dans l'espace (niveau 2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{7}$, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

**$\boxed{1}$ QCM (une seule réponse exacte pour chaque question). Justifier les réponses.**

On donne le point $\text{S}(1\,;-2\,;0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+y-3z+4=0$.

1°) Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point S et orthogonale au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1-3t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=-3-3t \end{cases}$

2°) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ sont :

a. $(-4\,;0\,;0)$ b. $\left(\frac{6}{5};-\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$ c. $\left(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ d. $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3°) La distance du point S au plan $\mathcal{P}$ est égale à :

a. $\frac{\sqrt{11}}{3}$ b. $\frac{3}{\sqrt{11}}$ c. $\frac{9}{\sqrt{11}}$ d. $\frac{9}{11}$

4°) On considère la sphère $\mathcal{S}$ de centre S et de rayon 3.
L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est égale

a. au singleton* constitué du point $\text{I}(1\,;-5\,;0)$ b. au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c. au cercle de centre S et de rayon $r=2$ d. au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$

* Rappel : Un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.

$\boxed{2}$ On considère les points $\text{A}(3\,;-2\,;2)$, $\text{B}(6\,;1\,;5)$ et $\text{C}(6\,;-2\,;-1)$.

**Partie A**

1°) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2°) Soit $P$ le plan orthogonal à (AB) passant par A et $P'$ le plan orthogonal à (AC) passant par A.
Déterminer une équation cartésienne de $P$ et $P'$ (détailler la rédaction uniquement pour $P$).
Démontrer que $P$ et $P'$ sont sécants.
3°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection $\Delta$ de $P$ et $P'$.

**Partie B**

1°) Soit D le point de coordonnées $(0\,;4\,;-1)$.
Démontrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
2°) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3°) Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\text{BDC}}$.
4°) a) Calculer l'aire du triangle BDC.
b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

$\boxed{3}$ **QCM**

On considère les points $\text{A}(3\,;1\,;3)$ et $\text{B}(-6\,;2\,;1)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y+2z=5$.

1°) L'ensemble $F$ des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{\text{MA}}-\overrightarrow{\text{MB}}\right\|=2$ est égal à :

a : un plan de l'espace b : une sphère c : l'ensemble vide

2°) Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$, sont :

a : $\left(\frac{11}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ b : $\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$ c : $\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

3°) La sphère $S$ de centre B et de rayon 1

a : coupe le plan $\mathcal{P}$ suivant un cercle b : est tangente au plan $\mathcal{P}$ c : ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$

4°) On considère la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-1)$ et la droite $\mathcal{D}'$ admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=t \end{cases}$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont

a : coplanaires et parallèles b : coplanaires et sécantes c : non coplanaires

5°) L'ensemble des points M équidistants de A et B est

a : la droite admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-t \\ y=\frac{3}{2}-7t \quad (t\in\mathbb{R}). \\ z=2+t \end{cases}$

b : le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$
c : le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$

$\boxed{4}$ On donne le point $\text{A}(5\,;3\,;0)$ ainsi que le plan $P$ d'équation cartésienne $2x-2y+z-1=0$.
1°) Caractériser par une inéquation le demi-espace fermé $\mathcal{E}_1$ de frontière $P$ qui ne contient pas le point O.
2°) a) Calculer d(A, $P$).
b) Déterminer une équation de la sphère $S$ de centre A et tangente à $P$.
c) Démontrer que $S$ est contenue dans $\mathcal{E}_1$.
3°) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\Delta$ passant par A et orthogonale à $P$.
b) En déduire les coordonnées du point H de contact de $S$ et $P$.

$\boxed{5}$ On considère les points $\text{A}(1\,;0\,;2)$, $\text{B}(1\,;1\,;4)$ et $\text{C}(-1\,;1\,;1)$.
1°) a) Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
b) Démontrer que le vecteur $\vec{u}\,(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) ; en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2°) Soit $P_1$ et $P_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.
a) Démontrer que les plans $P_1$ et $P_2$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
b) Démontrer que $\mathcal{D}$ // (ABC).

$\boxed{6}$ On considère les plans $P$, $Q$, $R$ précisés par une équation cartésienne

$P:\ 2x-y+5=0$, $Q:\ 3x+y-z=0$, $R:\ -5x+5y-z=0$

ainsi que la droite $\Delta$ définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

1°) Démontrer que $P$ et $Q$ sont sécants.
On pose $P\cap Q=\mathcal{D}$.
Déterminer un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
2°) La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $R$ ?
3°) Les droites $\mathcal{D}$ et $\Delta$ sont-elles coplanaires ?

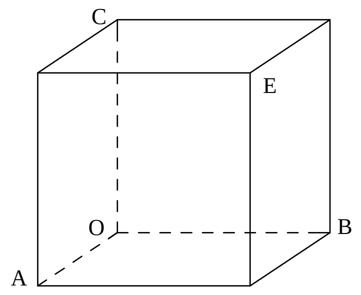
$\boxed{7}$ **QCM (justifier les réponses)**

On note $\mathcal{D}$ la droite définie par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

On justifiera chaque fois la réponse choisie (il y a à chaque fois une seule réponse exacte).

| | **Affirmation A** | **Affirmation B** | **Affirmation C** |
|---|---|---|---|
| **1°)** | Le point $\mathrm{M}(-1\,;3\,;2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. | Le point $\mathrm{N}(2\,;-3\,;-1)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. | Le point $\mathrm{R}(3\,;1\,;-4)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$. |
| **2°)** | Le vecteur $\vec{u}\,(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. | Le vecteur $\vec{v}(-2\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. | Le vecteur $\vec{w}(3\,;1\,;-4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. |
| **3°)** | $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$. | $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$. | $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$. |
| **4°)** | Le point $\mathrm{G}(1\,;3\,;-2)$ appartient au plan $\mathcal{P}$. | Le point $\mathrm{G}(1\,;3\,;2)$ appartient au plan $\mathcal{P}$. | Le point $\mathrm{G}(1\,;3\,;-1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$. |
| **5°)** | Le plan $Q_1$ d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. | Le plan $Q_2$ d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. | Le plan $Q_3$ d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$. |
| **6°)** | La distance du point $\mathrm{T}(-1\,;-3\,;2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\sqrt{14}$. | La distance du point $\mathrm{T}(-1\,;-3\,;2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à 14. | La distance du point $\mathrm{T}(-1\,;-3\,;2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$. |

$\boxed{8}$ La figure ci-dessous représente un cube d'arête 1 dont on a nommé certains sommets.
Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse au tétraèdre OABC.
On note I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC et J celui de la hauteur issue de B.




1°) a) Décrire les faces du tétraèdre OABC et en déduire la position du point I sur [AB] et celle du point J sur [AC].
b) Reproduire la figure donnée et construire précisément les points I et J, puis placer le point d'intersection K des droites (CI) et (BJ).
c) Que représente le point K pour le triangle ABC ?

2°) On se place dans le repère de l'espace $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.
a) Expliquer pourquoi ce repère est orthonormé et donner sans explication les coordonnées des points O, A, B, C, E.
b) Calculer les coordonnées de K.
En déduire que le point K appartient à la diagonale [OE] (préciser la position de K sur [OE]).
c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ est normal au plan (ABC) et en déduire la distance du point O au plan (ABC).

3°) Soit D le symétrique de K par rapport à O.
a) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont la même longueur).
b) Soit $\Omega$ le milieu du segment [OK].
Démontrer que le point $\Omega$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

# Corrigé

**1**

S(1 ; – 2 ; 0) $\boldsymbol{P}$ : $x+y-3z+4=0$

1°) Représentation paramétrique de la droite $D$ passant par S et orthogonale à $\boldsymbol{P}$

Un système d'équations paramétriques de $D$ s'écrit $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

On peut poser $t=t'+1$ et on obtient le résultat de la **réponse d**.

**Version plus détaillée :**

$\vec{u}\,(1;1;-3)$ est un vecteur normal à $\boldsymbol{P}$ donc c'est un vecteur directeur de $D$.

Donc un système d'équations paramétriques de $D$ s'écrit $\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

On pose : $\lambda=t+1 \quad (t\in\mathbb{R})$.

Donc un système d'équations paramétriques de $D$ s'écrit $\begin{cases} x=1+t+1 \\ y=-2+t+1 \\ z=-3(t+1) \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

soit $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t-1 \\ z=-3-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Donc la bonne réponse est la réponse d.

**Autre méthode :**

Le vecteur $\vec{u}\,(1;1;-3)$ est un vecteur normal à $\boldsymbol{P}$ donc c'est un vecteur directeur de la droite $D$.

Cela nous permet d'exclure (d'éliminer) les réponses a et c.
On regarde ensuite si S appartient aux droites définies par les systèmes d'équations paramétriques proposées dans les réponses b ou d.

Ou :

Le vecteur $\vec{u}\,(1;1;-3)$ est un vecteur normal à $\boldsymbol{P}$ donc c'est un vecteur directeur de la droite $D$.
Cela nous permet d'éliminer les réponses a et c.
Il ne reste plus que les réponses b et d.
On regarde parmi les deux réponses, celle à laquelle le point S appartient.
Donc la bonne réponse est la réponse d.

2°) Coordonnées du point d'intersection H de la droite $D$ et du plan $\boldsymbol{P}$

On utilise le système d'équations paramétriques de la droite $D$ déterminé à la question précédente et l'équation cartésienne de $\boldsymbol{P}$.
On remplace $x$, $y$, $z$ dans l'équation cartésienne du plan $\boldsymbol{P}$ par leurs expressions.
On trouve alors la valeur de $t$.
On remplace cette valeur de $t$ dans le système d'équations paramétrique de $D$.
On trouve ainsi les coordonnées de H.
On obtient la **réponse d**.

**Version détaillée :**

Le paramètre $\lambda$ du point H d'intersection de $D$ et $\boldsymbol{P}$ est solution de l'équation
$1+\lambda-2+\lambda-3(-3\lambda)+4=0$ (1) [en utilisant le système d'équation paramétriques de la droite déterminé précédemment qui n'est pas celui de la réponse proposée]

(1) $\Leftrightarrow -1+2\lambda+9\lambda+4=0$

$\Leftrightarrow 11\lambda+3=0$

$\Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{3}{11}$

Donc H $\left| \begin{array}{l} x_H=1-\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11} \\ y_H=-2-\dfrac{3}{11}=-\dfrac{25}{11} \\ z_H=\dfrac{9}{11} \end{array} \right.$.

**Autre façon :**

On utilise le système d'équation paramétrique de la réponse d.

Le paramètre $t$ du point H d'intersection de $D$ et $\boldsymbol{P}$ est solution de l'équation
$2+t+t-1-3(-3t-3)+4=0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 2+t+t-1+9t+9+4=0$

$\Leftrightarrow 14+11t=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{14}{11}$

H $\left| \begin{array}{l} x_H=2-\dfrac{14}{11}=\dfrac{8}{11} \\ y_H=-\dfrac{14}{11}-1=-\dfrac{25}{11} \\ z_H=-3\times\left(-\dfrac{14}{11}\right)-3=\dfrac{9}{11} \end{array} \right.$

H$\left(\dfrac{8}{11};-\dfrac{25}{11};\dfrac{9}{11}\right)$

3°) Distance du point S au plan $\mathcal{P}$

On applique la formule qui donne la distance d'un point à un plan.
On obtient la réponse b.

**Version détaillée :**

**1ère méthode :** on applique la formule de distance d'un point à un plan

$$\begin{aligned} d(S,\mathcal{P}) &= \frac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

La bonne réponse est la **réponse b**.

**2e méthode :** on calcule directement la longueur SH.

S(1 ; – 2 ; 0)
$H\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(\frac{8}{11}-1\right)^2+\left(-\frac{25}{11}+2\right)^2+\left(\frac{9}{11}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{11^2}+\frac{9}{11^2}+\frac{81}{11^2}} \\ &= \sqrt{\frac{99}{11^2}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{11}} \qquad \text{ou } = \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ &= \frac{3}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

4°) $\mathcal{S}$ : sphère de centre S et de rayon 3

Intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$

On applique la règle sur l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
On note $S$ la sphère de centre A et de rayon $R$ et $d$ la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ ($d$ = d(A, $\mathcal{P}$), observer que les deux d n'ont pas la même signification).

Si $d < R$, alors l'intersection de la sphère $S$ et du plan $\mathcal{P}$ est le cercle de centre H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore, faire une figure pour le visualiser).

Il faut d'abord remarquer que H est le projeté orthogonal de S sur $\mathcal{P}$.
La bonne réponse est la **réponse b**.

**Version détaillée :**

$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}$ : cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$

Il faut préciser les lettres $R$ et $d$.

La lettre $R$ désigne le rayon de la sphère $\mathcal{S}$ et la lettre $d$ désigne la distance de S au plan $\mathcal{P}$.

On peut refaire la figure pour comprendre la formule qui provient du théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2-d^2} \\ &= \sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2} \\ &= \sqrt{9-\frac{9}{11}} \\ &= \sqrt{\frac{90}{11}} \\ &= 3\sqrt{\frac{10}{11}} \end{aligned}$$

**Remarque :**
$\mathcal{S}$ a pour équation $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$.
On ne sert pas de cette équation.

$\boxed{2}$

$A(3\,;-2\,;2)$ $\quad$ $B(6\,;1\,;5)$ $\quad$ $C(6\,;-2\,;-1)$

**Partie A :**

1°) **Démontrons que ABC est rectangle.**

**On ne met pas de phrase avant de commencer le calcul.**

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}3\\3\\3\end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}3\\0\\-3\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=3\times3+0\times3+3\times(-3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
D'où (AB) ⊥ (AC).
On en conclut que ABC est rectangle en A.

**Remarque de méthode :**

Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A, on a démontré que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$.

On aurait aussi pu utiliser la réciproque du théorème de Pythagore.
Mais cette méthode est moins économique en calculs donc un peu maladroite.

2°)

*P* : plan orthogonal à (AB) passant par A

*P'* : plan orthogonal à (AC) passant par A

• **Déterminons une équation cartésienne des plans *P* et *P'*.**

On sait que *P* est orthogonal à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à *P*.

*P* admet donc une équation cartésienne de la forme $3x+3y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
Or $A\in P$ donc $3\times3+3\times(-2)+3\times2+d=0$ d'où $d=-9$.

Donc le plan *P* a pour équation cartésienne $3x+3y+3z-9=0$ soit (en simplifiant par 3) : $x+y+z-3=0$.

**Autre rédaction :**

On sait que *P* est orthogonal à (AB) donc *P* admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal (car c'est un vecteur directeur de (AB)).

*P* admet donc une équation cartésienne de la forme $3x+3y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
Or $A\in P$ donc $3\times3+3\times(-2)+3\times2+d=0$ d'où $d=-9$.

Donc le plan *P* a pour équation cartésienne $3x+3y+3z-9=0$ soit (en simplifiant par 3) : $x+y+z-3=0$.

Donc une équation cartésienne de *P* est $3x+3y+3z-9=0$ soit (en simplifiant par 3) : $x+y+z-3=0$.

De même, le plan *P'* admet pour équation cartésienne $x-z-1=0$.

On sait que *P'* est orthogonal à (AC) donc $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à *P'*.

*P'* admet donc une équation cartésienne de la forme $3x-3z+d'=0$ avec $d'\in\mathbb{R}$.
Or $A\in P'$ donc $3\times3-3\times2+d'=0$
d'où $d'=-3$.

Donc le plan *P'* a équation cartésienne $3x-3z-3=0$ soit (en simplifiant par 3) $x-z-1=0$.

**Autre démarche pour trouver des équations cartésiennes :**

Soit M un point quelconque de l'espace.
On note $(x\,;y\,;z)$ ses coordonnées.

$$\begin{aligned}M\in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=0\\ &\Leftrightarrow 3(x-3)+3(y+2)+3(z-2)=0\\ &\Leftrightarrow 3x-9+3y+6+3z-6=0\\ &\Leftrightarrow 3x+3y+3z-9=0\\ &\Leftrightarrow x+y+z-3=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M\in P' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AM}=0\\ &\Leftrightarrow 3(x-3)-3(y+2)=0\\ &\Leftrightarrow 3x-3z-9+6=0\\ &\Leftrightarrow x-z-1=0 \quad :3\end{aligned}$$

• **Démontrons que les plans *P* et *P'* sont sécants.**

Les plans *P* et *P'* passent tous les deux par le point A. De plus, leurs équations cartésiennes trouvées précédemment permettent de voir qu'ils ne sont pas confondus.

Ils sont donc sécants suivant une droite qui passe par A.

On ne dit pas que les plans *P* et *P'* sont sécants en A.

**Autre façon :**

$\overrightarrow{AB}(3\,;3\,;3)$ est un vecteur normal à *P* et $\overrightarrow{AC}(3\,;0\,;-3)$ est un vecteur normal à *P'*.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc *P* et *P'* ne sont pas parallèles. Par conséquent, ils sont sécants.

**Variante de rédaction :**

$P$ admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal et $P'$ admet le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans $P$ et $P'$ ne sont pas parallèles.
Par conséquent, ils sont sécants selon une droite Δ.

(ne s'applique que pour les plans, pas pour les droites attention !)

3°) $P \cap P' = \Delta$

**Déterminons un système d'équations paramétriques de Δ.**

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point quelconque de l'espace.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

On a un système de 2 équations à 3 inconnues donc on rajoute une troisième équation en posant $z=t$ (avec $t$ : paramètre).

Posons $z=t$.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t-3=0 \\ x=t+1 \\ z=t \end{cases}$$ (les systèmes sont bien équivalents)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t+1+y+t-3=0 \\ x=t+1 \\ z=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2t+2 \\ x=t+1 \\ z=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$$

Δ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Autre choix possible :**

On peut aussi poser $y=t$.

$$\begin{cases} 3x+3z-9+3t=0 \\ x=z+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(z+1)+3z-9+3t=0 \\ x=z+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6z-6+3t=0 \\ x=z+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{-6+3t}{6} \\ x=\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=-1+\dfrac{t}{2} \\ x=\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

On peut dire Δ est la droite passant par le point $A(0\,;0\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Autre rédaction possible :**

On considère le système formé par les équations cartésiennes de $P$ et $P'$ :

(I) $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ (système linéaire de 2 équations à trois inconnues)

On va considérer l'une des inconnues (ici $z$) comme une constante.

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+3 \\ x=z+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (z+1)+y=-z+3 \\ x=z+1 \end{cases} \qquad \text{(substitution)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2z+2 \\ x=z+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z+1 \\ y=-2z+2 \\ z=z \end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de $\Delta$ s'écrit $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

> Il est possible de résoudre le système $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$ grâce à la calculatrice (dans les applications, choisir 8 : PlySmlt2).
>
> On écrit d'abord le système sous la forme $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$.
>
> On choisit le solveur de systèmes d'équations.
> Il y a 2 équations et 3 inconnues.
> On remplit les coefficients de la matrices $2\times4$ : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
>
> On obtient l'affichage : $\begin{matrix} X_1 = 1+X_3 \\ X_2 = 2-2X_3 \\ X_3 = X_3 \end{matrix}$.

**Partie B**

1°) **Démontrons que (AD) ⊥ (ABC).**

> **Point-méthode :**
>
> On démontre que la droite (AD) est orthogonale (ici perpendiculaire en fait car les droites sont sécantes) à la droite (AB) et à la droite (AC). Pour cela, on utilise le produit scalaire.
> On utilise la propriété :
> « Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan ».

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} &= (-3)\times3+6\times3-3\times3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc (AD) ⊥ (AB)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AC} &= (-3)\times3+6\times0-3\times(-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc (AD) ⊥ (AC)

(AD) est orthogonale à (AB) et à (AC).
Donc (AD) est orthogonale à (ABC).

2°) **Calculons le volume du tétraèdre ABCD.**

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{\mathbf{B}\times h}{3}$ où $\boldsymbol{B}$ désigne l'aire de la base et $h$ la hauteur correspondant à cette base (c'est la formule $\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{3}$).
On prend pour base ABC (triangle rectangle en A).
La droite (AD) est orthogonale au plan (ABC) donc (AD) est la hauteur issue de A dans le tétraèdre ABCD.

(On applique la formule avec $\boldsymbol{B}$ = aire de la base ABC ; $h$ = hauteur AD du tétraèdre)

Ou :

$V=\mathbf{B}\times h\times\dfrac{1}{3}$
$\boldsymbol{B}$ = aire de la base ABC

$h$ = hauteur AD du tétraèdre

On peut faire une figure pour visualiser la situation.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2+3^2+3^2} \\ &= \sqrt{27} \qquad \text{(ligne facultative)} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{54} \\ &= 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

On calcule $\mathcal{A}_{ABC}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{AB \times AC}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{6}}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

La hauteur du tétraèdre ABCD est égale à AD.

$$\begin{aligned} V_{ABCD} &= \frac{\mathcal{A}_{ABC}\times AD}{3} \\ &= \frac{\frac{9\sqrt{6}}{2}\times 3\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{9\sqrt{6}\times 3\sqrt{6}}{3\times 2} \\ &= 27 \text{ u. v.} \end{aligned}$$

**Remarque de vocabulaire :**

ABCD est un **tétraèdre trirectangle** (car il a trois angles droits en A).

3°) **Déterminons la mesure en radians de l'angle $\widehat{BDC}$.**

**Méthode :**
On passe par le cosinus, le sinus ou la tangente.
On a une formule qui permet de calculer aisément le cosinus d'un angle.
$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ ou $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}$

Calculons $\cos\widehat{BDC}$.

On a : $\cos\widehat{BDC} = \dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{DB\times DC}$ (car $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DB\times DC\times\cos\widehat{BDC}$)

On calcule à part $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{DB}\begin{vmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{vmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} DB &= \sqrt{6^2+(-6)^2+6^2} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DC &= \sqrt{6^2+(-3)^2+0} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} &= -6\times(-6)+3\times 6+(-6)\times 0 \\ &= 36+18 \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\widehat{BDC} &= \frac{54}{9\times 6\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

[ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ [forme du résultat non nécessaire]

Or $0 \leqslant \widehat{BDC} \leqslant \pi$ (important à dire) donc : $\boldsymbol{\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}}$ **rad**.

**Remarque de méthode :**

On pourrait aussi utiliser la formule de Pythagore généralisée (formule d'Al-Kashi) mais c'est plus long et plus maladroit.

On pourrait écrire $\widehat{BDC} = \text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4°) a) **Calculons l'aire du triangle BDC.**

On utilise la formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle quelconque en fonction des longueurs de deux côtés et de l'angle qu'ils forment.

$$\mathcal{A}_{\text{BDC}} = \frac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin \widehat{\text{BDC}}$$
$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \textbf{27 u.a.}$$

$$\mathcal{A}_{\text{BDC}} = \frac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin \widehat{\text{BDC}}$$
$$= 27\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 27 \text{ u.a.}$$

**Remarque de méthode :**

On pourrait aussi calculer la hauteur du triangle BDC mais ce serait plus long et plus maladroit.

b) **Calculons d(A, (BDC)).**

On calcule le volume de ABCD en prenant cette fois le triangle BCD pour base.

$$V_{\text{ABCD}} = \frac{\mathcal{A}_{\text{BDC}} \times \text{d}\big(\text{A}, (\text{BDC})\big)}{3}$$

Donc $27 = \dfrac{27 \times \text{d}\big(\text{A}, (\text{BDC})\big)}{3}$

D'où $\mathbf{d\big(A, (BDC)\big) = 3}$.

**Autre façon :**

$V_{\text{ABCD}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{BDC}} \times \text{d}\big(\text{A}, (\text{BDC})\big)}{3}$ donc $\text{d}\big(\text{A}, (\text{BDC})\big) = \dfrac{V_{\text{ABCD}} \times 3}{\mathcal{A}_{\text{BDC}}} = \dfrac{27 \times 3}{27} = 3$.

$\boxed{3}$ **QCM**

1°) **Réponse b** (pour la recherche de l'ensemble *F*, ne pas utiliser les coordonnées de A et de B ; en revanche utiliser un barycentre)

$$F = \left\{ \text{M} \in \mathcal{E} \ / \left\| 4\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} \right\| = 2 \right\}$$

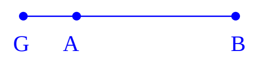
**1ère méthode : la plus simple et la meilleure (utilisation du barycentre, sans utiliser les coordonnées)**

**1ère étape : réduction de la somme vectorielle**

Soit G le barycentre des points pondérés $(\text{A}\,;4)$ et $(\text{B}\,;-1)$.

D'après la relation fondamentale pour les barycentres, pour tout point M de l'espace, on a : $4\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} = 3\overrightarrow{\text{MG}}$.

**Figure**




(Sur une figure, on a : $\overrightarrow{\text{AG}} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$)

**2e étape : recherche de l'ensemble**

$$\begin{aligned}
\text{M} \in F &\Leftrightarrow \left\| 4\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} \right\| = 2 \\
&\Leftrightarrow \left\| 3\overrightarrow{\text{MG}} \right\| = 2 \\
&\Leftrightarrow |\,3\,| \times \left\| \overrightarrow{\text{MG}} \right\| = 2 \\
&\Leftrightarrow 3 \times \text{MG} = 2 \\
&\Leftrightarrow \text{MG} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**3e étape : conclusion (identification de l'ensemble)**

L'ensemble *F* est la sphère de centre G et de rayon $r = \dfrac{2}{3}$.

**2e méthode :** plus longue, plus fastidieuse, à éviter (utilisation des coordonnées)

Soit $\text{M}(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace.

$$\overrightarrow{\text{MA}} \begin{vmatrix} 3-x \\ 1-y \\ 3-z \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{\text{MB}} \begin{vmatrix} -6-x \\ 2-y \\ 1-z \end{vmatrix} \qquad 4\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} \begin{vmatrix} 12-4x \\ 4-4y \\ 12-4z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{M} \in F &\Leftrightarrow \left\| 4\overrightarrow{\text{MA}} - \overrightarrow{\text{MB}} \right\| = 2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left[3(6-x)\right]^2 + (2-3y)^2 + (11-3z)^2} = 2 \\
&\Leftrightarrow 9\left(36 - 12x + x^2\right) + 4 - 12y + 9y^2 + 121 - 66z + 9z^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow 324 - 108x + 9x^2 + 4 - 12y + 9y^2 + 121 - 66z + 9z^2 = 4 \\
&\Leftrightarrow 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 108x - 12y - 66z + 445 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 12x - \frac{4}{3}y - \frac{22}{3}z + \frac{445}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 - \frac{121}{9} + \frac{445}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-6)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{320}{9} - \frac{324}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-6)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

L'ensemble $F$ est la sphère de centre $\Omega\left(6\,;\frac{2}{3}\,;\frac{11}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

**Remarque :**

On peut calculer les coordonnées du point G (barycentre des points pondérés (A ; 4) et (B ; – 1) à l'aide de la formule du cours donnant les coordonnées d'un barycentre.

$$\mathrm{G}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{G}}=\dfrac{-18}{3}=-6 \\ y_{\mathrm{G}}=\dfrac{2}{3} \\ z_{\mathrm{G}}=\dfrac{11}{3}\end{array}\right.$$

On retrouve le point Ω centre de la sphère obtenu avec la deuxième méthode (mais encore une fois ce calcul ne sert à rien pour la première méthode).

On peut aussi retrouver les coordonnées de G à partir de l'égalité de définition du barycentre : $4\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}$ (1).

(1) donne successivement :

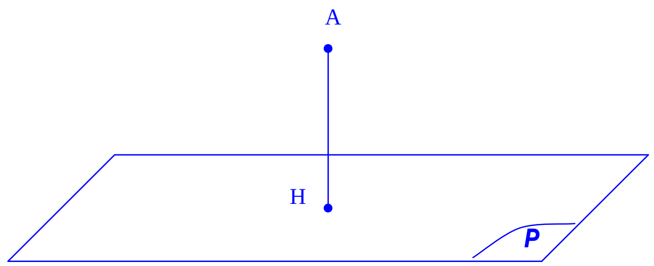
$$\begin{cases} 4(3-x_{\mathrm{G}})-(-6-x_{\mathrm{G}})=0 \\ 4(3-y_{\mathrm{G}})-(2-x_{\mathrm{G}})=0 \\ 4(3-z_{\mathrm{G}})-(1-z_{\mathrm{G}})=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_{\mathrm{G}}=-18 \\ -3y_{\mathrm{G}}=-2 \\ -3z_{\mathrm{G}}=-11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{G}}=\dfrac{-18}{3}=-6 \\ y_{\mathrm{G}}=\dfrac{2}{3} \\ z_{\mathrm{G}}=\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

2°) **Réponse c**

Figure




Le projeté orthogonal H du point A sur le plan ***P*** est le point d'intersection de la droite Δ orthogonale à ***P*** passant par A.

On détermine un système d'équations paramétriques de la droite Δ.
Puis on utilise l'équation cartésienne de ***P*** pour déterminer le paramètre du point H sur Δ.

Soit Δ la droite orthogonale à ***P*** passant par A.

Une équation cartésienne de ***P*** s'écrit $x+2y+2z-5=0$ donc le vecteur $\vec{u}(1\,;2\,;2)$ est un vecteur normal à ***P***.

Par conséquent, comme $\Delta\perp$ ***P***, on en déduit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

Un système d'équations paramétriques de la droite Δ s'écrit donc $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}\quad(\lambda\in\mathbb{R})$.

Ce système donne les coordonnées de n'importe quel point appartenant à la droite.

Le point H est le point d'intersection de Δ et de ***P*** donc son paramètre λ vérifie l'équation :
$(3+\lambda)+2(1+2\lambda)+2(3+2\lambda)=5$ (1)

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 3+\lambda+2+4\lambda+6+4\lambda=5 \\ &\Leftrightarrow 9\lambda=-6 \\ &\Leftrightarrow \lambda=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} x_{\mathrm{H}}=3-\dfrac{2}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=1+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ z_{\mathrm{H}}=3+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_H = \dfrac{7}{3} \\ y_H = -\dfrac{1}{3} \\ z_H = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

$H\left(\dfrac{7}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$

**Autre façon :**

On procède par élimination.

On sait que $\vec{u}(1\,;2\,;2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{u}$ (il n'est pas forcément égal).

On prend les points donnés.

$H_1\left(\dfrac{11}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{H_1A}\left| \begin{array}{l} 3-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{2}{3} \\ 1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3} \\ 3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{H_1A}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. On élimine la réponse a.

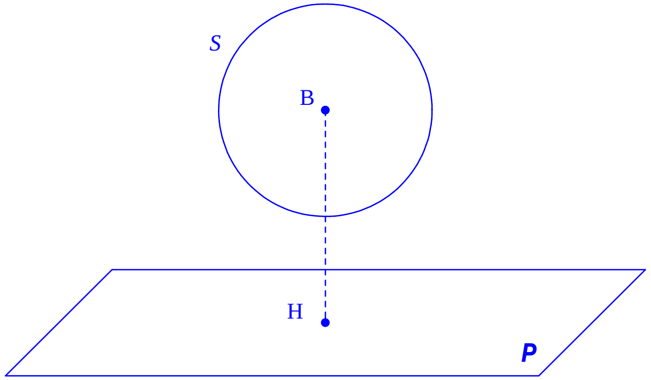
$H_2\left(\dfrac{8}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{7}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{H_2A}\left| \begin{array}{l} 3-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2}{3} \\ 1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3} \\ 3-\dfrac{7}{3}=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{H_2A}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. On élimine la réponse b.

$H_3\left(\dfrac{7}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{H_3A}\left| \begin{array}{l} 3-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{2}{3} \\ 1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3} \\ 3-\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$ $\quad \overrightarrow{H_3A}$ est colinéaire à $\vec{u}$ (car $\overrightarrow{H_3A}=-\dfrac{2}{3}\vec{u}$). On garde la réponse c.

On peut vérifier que ce point appartient bien au plan $\mathcal{P}$.

3°) **Réponse c**

Il peut être intéressant de représenter sur un schéma la sphère $S$ et le plan $\mathcal{P}$.



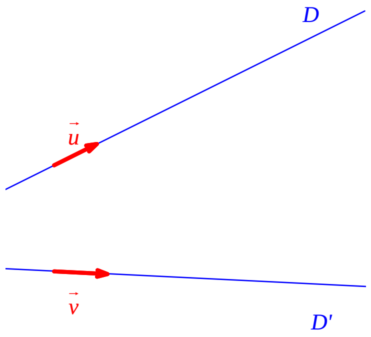

$$d(B,\mathcal{P})=\frac{|-6+2\times2+2\times1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-\cancel{6}+\cancel{4}+\cancel{2}-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{5}{3}$$

$d(B,\mathcal{P})>1$ donc la sphère $S$ ne coupe pas le plan $\mathcal{P}$.

4°) **Réponse c**

Dans cette question, il s'agit de déterminer la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

La droite $\mathcal{D}$ admet le vecteur $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$ pour vecteur directeur.
La droite $\mathcal{D}'$ admet le vecteur $\vec{v}(2\,;1\,;1)$ pour vecteur directeur.




• On regarde si $\boldsymbol{D} \,//\, \boldsymbol{D}'$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ ne sont pas parallèles.

• On regarde si $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ sont sécantes.
Elles sont coplanaires uniquement dans le cas où elles sont sécantes ou parallèles.
Elles sont non coplanaires si elles sont ni parallèles ni sécantes.

Pour savoir si $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ sont sécantes, on résout un système de <u>3</u> équations à 2 inconnues.
Ce système est obtenu à partir des systèmes d'équations paramétriques de chacune des deux droites. Comme il y a plus d'équations que d'inconnues, on considère le système formé par les deux premières équations (on prend deux équations faciles). On vérifie alors dans la 3e équation.

Cherchons si $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ sont sécantes.

$$\boldsymbol{D}\ \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \ (t' \in \mathbb{R}) \qquad \boldsymbol{D}'\ \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$$

On résout le système :

$$\begin{cases} 3 + t' = 3 + 2t & (1) \\ 1 + 2t' = 3 + t & (2) \\ 3 - t' = t & (3) \end{cases}$$

On résout d'abord le système formé par les équations (1) et (3) (on choisit celui-ci car il est simple à résoudre).

$$\begin{cases} \cancel{3} + t' = \cancel{3} + 2t & (1) \\ 3 - t' = t & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = 2t \\ 3 - 2t = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = 2t \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t' = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Regardons si l'équation (2) est vérifiée.

$1 + 2t' = 5$ et $3 + t = 4$

Donc (2) n'est pas vérifiée.

On en déduit que les droites $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$ ne sont pas sécantes.
Par conséquent, elles sont non coplanaires.

5°) **b** (plan médiateur du segment [AB])

On note $\boldsymbol{P}$ l'ensemble des points M équidistants de A et B.

**1ère méthode :**

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \boldsymbol{P} &\Leftrightarrow \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(3-x)^2 + (1-y)^2 + (3-z)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-6-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow -18x + 2y - 4z - 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow 9x - y + 2z + 11 = 0 \end{aligned}$$

**2e méthode :**

L'ensemble $\boldsymbol{P}$ est le plan médiateur du segment [AB] c'est-à-dire le plan passant par le milieu I du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

On commence par calculer les coordonnées du milieu I de [AB].

$$\mathrm{I}\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,2\right)$$

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \boldsymbol{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IM}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow 9x - y + 2z + 11 = 0$

**Autre façon :**

On procède par élimination.

L'ensemble des points M équidistants de A et B est le plan médiateur de [AB].

On peut donc éliminer la réponse a (car l'ensemble est un plan et non une droite).

On sait que le plan médiateur est orthogonal à (AB).

Or $\overrightarrow{AB}\left(-9\,;1\,;-2\right)$ donc $\vec{n}\left(9\,;-1\,;2\right)$ (9 ; – 1 ; 2) est un vecteur normal à ce plan.
On ne conserve donc plus que la réponse b (on élimine d'emblée la réponse c).

On peut enfin vérifier que le milieu I de [AB] qui a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;2\right)$ appartient bien au plan de la réponse b.

$\boxed{4}$

$A\left(5\,;3\,;0\right)$ $\qquad\qquad$ $P:\ 2x - 2y + z - 1 = 0$

1°) **Caractérisons par une inéquation le demi-espace fermé $E_1$ de frontière $P$ qui ne contient pas le point O.**

**Rappel :** O est l'origine du repère.

On a : $2\times 0 - 2\times 0 + 0 - 1 = -1$.

**Le demi-espace $E_1$ est caractérisé par l'inéquation $2x - 2y + z - 1 \geqslant 0$.**

2°)

a) **Calcul de d(A, *P*)**

$$\mathrm{d}\left(A,\,P\right) = \frac{|2\times 5 - 2\times 3 + 1\times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{3} = 1$$

b) **Déterminons une équation de la sphère *S* de centre A et tangente à *P*.**

La sphère *S* a pour centre 1 et a pour rayon 1.

$S:\ \left(x-5\right)^2 + \left(y-3\right)^2 + z^2 = 1$

On peut éventuellement développer cette équation :

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 6y + 25 + 9 = 1$

$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 6y + 33 = 0$

c) **Démontrons que *S* est contenue dans $E_1$.**

On vérifie que $A \in E_1$.

$2\times 5 - 2\times 3 + 0 - 1 = 3$ donc $2\times 5 - 2\times 3 + 0 - 1 > 0$.
Donc $A \in E_1$.

Or *S* est tangente à *P* donc *S* est contenue dans $E_1$.
On peut écrire $S \subset E_1$.
Le symbole $\subset$ signifie « est inclus dans » (ou « est contenu dans », ce symbole est d'ailleurs un C allongé et stylisé).
Il ne faut pas confondre ce symbole avec le symbole $\in$, « appartient à » (symbole d'appartenance).
On écrit qu'un ensemble est inclus dans un autre.
On écrit qu'un élément appartient à un ensemble.

3°)

a) Δ est orthogonale à *P* et passe par A.

Le vecteur $\vec{u}\left(2\,;-2\,;1\right)$ est un vecteur directeur de Δ.

$$\Delta\ \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$$

b) D'après le cours, le point H, point de contact (ou point de tangence) du plan *P* et de la sphère *S*, est le projeté orthogonal de A, centre de la sphère *S*, sur le plan *P*.
C'est donc le point d'intersection de la droite Δ et de *P*.

$D \cap P = \left\{ H \right\}$

Le paramètre *t* du point H est solution de l'équation $2\left(5+2t\right) - 2\left(3-2t\right) + t - 1 = 0$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 10 + 4t - 6 + 4t + t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$

On remplace *t* par $-\frac{1}{3}$ dans les équations paramétriques de Δ.

$$\mathrm{H}\left|\begin{array}{l} x_{\mathrm{H}}=5-\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{3} \\ y_{\mathrm{H}}=3+\dfrac{2}{3}=\dfrac{11}{3} \\ z_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{13}{3}\,;\frac{11}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$$

$\boxed{5}$

$\mathrm{A}(1\,;0\,;2)$ $\qquad$ $\mathrm{B}(1\,;1\,;4)$ $\qquad$ $\mathrm{C}(-1\,;1\,;1)$

1°) a) **Démontrons que les points A, B, C ne sont pas alignés.**

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(0\,;1\,;2)$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-2\,;1\,;-1)$

Il n'existe pas de réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) **Démontrons que le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).**

$\vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\times0+4\times1+(-2)\times2=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux.

$\vec{u}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2)\times3+1\times4+(-2)\times(-1)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux.

On en déduit que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ qui sont deux vecteurs <u>non colinéaires</u> du plan (ABC). Par suite, le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Comme $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC), (ABC) admet une équation cartésienne de la forme $3x+4y-2z+d=0$ où $d$ est un réel.
$\mathrm{A}\in(\mathrm{ABC})$ donc $d=-3x_{\mathrm{A}}-4y_{\mathrm{A}}+2z_{\mathrm{A}}$ d'où $d=1$.
Une équation cartésienne de (ABC) s'écrit donc $3x+4y-2z+1=0$.

2°) $P_1\,:\,2x+y+2z+1=0$ $\qquad$ $P_2\,:\,x-2y+6z=0$

**Démontrons que les plans $P_1$ et $P_2$ sont sécants suivant une droite $\boldsymbol{D}$.**

On sait que le vecteur $\overrightarrow{n_1}(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal à $P_1$ et que le vecteur $\overrightarrow{n_2}(1\,;-2\,;6)$ est un vecteur normal à $P_2$.
Il n'existe pas de réel $\beta$ tel que $\overrightarrow{n_2}=\beta\overrightarrow{n_1}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les plans $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants suivant une droite $\boldsymbol{D}$.

**Déterminons un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{D}$.**

La droite $\boldsymbol{D}$ est définie par le système $\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\x-2y+6z=0\end{cases}$.

On pose $z=\lambda$.

Le système initial peut donc s'écrire $\begin{cases}2x+y+2\lambda+1=0\\x-2y+6\lambda=0\\z=\lambda\end{cases}$ (système linéaire de 3 équations à 3 inconnues).

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\x-2(-2x-2\lambda-1)+6\lambda=0\\z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\x+4x+4\lambda+2+6\lambda=0\\z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\x=\dfrac{-10\lambda-2}{5}\\z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2x-2\lambda-1\\x=-2\lambda-\dfrac{2}{5}\\z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2\left(-2\lambda-\dfrac{2}{5}\right)-2\lambda-1\\x=-2\lambda-\dfrac{2}{5}\\z=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2\lambda-\dfrac{1}{5}\\x=-2\lambda-\dfrac{2}{5}\\z=\lambda\end{cases}$$

La droite $\mathcal{D}$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -2\lambda - \dfrac{2}{5} \\ y = 2\lambda - \dfrac{1}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

b) **Démontrons que $\mathcal{D}$ // (ABC).**

Le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$ permet de dire que le vecteur $\vec{v}(-2\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Or on sait que le vecteur $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
$\vec{u} \bullet \vec{v} = 3\times(-2)+4\times2+(-2)\times1 = -6+8-2 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
On en déduit que $\mathcal{D}$ // (ABC).

$\boxed{6}$

$P:\ 2x - y + 5 = 0$ $\qquad Q:\ 3x + y - z = 0$ $\qquad R:\ -5x + 5y - z = 0$ $\qquad \Delta \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

**Solution détaillée :**

1°) **Démontrons que $P$ et $Q$ sont sécants.**

D'après les équations cartésiennes de $P$ et $Q$, on peut dire que le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;0)$ est un vecteur normal à $P$ et que le vecteur $\vec{v}(3\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à $Q$.
Il n'existe pas de réel $\alpha$ tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, les plans $P$ et $Q$ ne sont pas parallèles ; ils sont donc sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.

**Déterminons un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.**

La droite $\mathcal{D}$ est définie par le système $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$.

On pose $z = \lambda'$ (**N.B. :** on note $\lambda'$ le paramètre plutôt que $\lambda$ car le paramètre $\lambda$ est utilisé dans l'énoncé pour définir la droite $\Delta$).

Le système initial peut donc s'écrire $\begin{cases} x = \dfrac{y-5}{2} \\ \dfrac{3}{2}y + y - \dfrac{15}{2} - \lambda' = 0 \\ z = \lambda' \end{cases}$ (système linéaire de 3 équations à 3 inconnues).

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x = \dfrac{y-5}{2} \\ \dfrac{5}{2}y - \dfrac{15}{2} - \lambda' = 0 \\ z = \lambda' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} - \dfrac{5}{2} \\ y = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ x = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases}$$

La droite $\mathcal{D}$ admet pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} y = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ x = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R})$.

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = -1 + \dfrac{1}{5}\lambda' \\ y = 3 + \dfrac{2}{5}\lambda' \\ z = \lambda' \end{cases} \quad (\lambda' \in \mathbb{R})$$

**Autre façon :**

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 & (1) \\ 3x + y - z = 0 & (2) \\ z = t & (3) \end{cases}$$

(1) donne : $y = 2x + 5$.

(2) donne alors $3x + 2x + 5 - t = 0$
$5x + 5 - t = 0$
$x = \dfrac{t}{5} - 1$

On obtient alors grâce à (1) : $y=\frac{2t}{5}-2+5=\frac{2t}{5}+3$ d'où un système d'équations paramétriques de $\boldsymbol{D}$ :

$$\begin{cases} x=\frac{t}{5}-1 \\ y=\frac{2t}{5}+3 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

2°) **Déterminons si la droite $\boldsymbol{D}$ est parallèle au plan *R*.**

D'après l'équation cartésienne de *R* donnée dans l'énoncé, on peut dire que le vecteur $\vec{n}(-5\,;5\,;-1)$ est un vecteur normal à *R*.

D'après le système d'équations paramétriques de, on peut dire que $\boldsymbol{D}$ admet le vecteur $\vec{w}\left(\frac{1}{5}\,;\frac{2}{5}\,;1\right)$ pour vecteur directeur.

$$\vec{n}\bullet\vec{w}=-5\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times5-1\times1=-1+2-1=0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ($\vec{n}\perp\vec{w}$).
Par conséquent, $\boldsymbol{D}$ // *R*.

3°) **Déterminons si les droites $\boldsymbol{D}$ et $\Delta$ sont coplanaires.**

$$\Delta\ \begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \ (\lambda\in\mathbb{R}) \qquad \boldsymbol{D}\ \begin{cases} x=-1+\frac{1}{5}\lambda' \\ y=3+\frac{2}{5}\lambda' \\ z=\lambda' \end{cases} \ (\lambda'\in\mathbb{R})$$

On sait que le vecteur $\vec{w}\left(\frac{1}{5}\,;\frac{2}{5}\,;1\right)$ est un vecteur directeur de $\boldsymbol{D}$.

De plus, le vecteur $\vec{w'}(-3\,;1\,;2)$ est un vecteur directeur de $\Delta$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ ne sont pas colinéaires.
Par conséquent, $\boldsymbol{D}$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles.

Pour savoir si $\boldsymbol{D}$ et $\Delta$ sont sécantes, on résout le système $\begin{cases} -3\lambda=-1+\frac{1}{5}\lambda' & (1) \\ 1+\lambda=3+\frac{2}{5}\lambda' & (2) \\ 2+2\lambda=\lambda' & (3) \end{cases}$ $(\lambda'\in\mathbb{R})$.

En reportant (3) dans (1), on obtient successivement :

$$-3\lambda=-1+\frac{1}{5}(2+2\lambda)$$
$$-3\lambda=-1+\frac{2}{5}+\frac{2\lambda}{5}$$
$$\frac{3}{5}=\frac{17}{5}\lambda$$
$$\lambda=\frac{3}{17}$$

L'équation (3) donne alors : $\lambda'=2+\frac{6}{17}=\frac{40}{17}$.

Avec les valeurs de $\lambda$ et de $\lambda'$ trouvée précédemment, on a :
$1+\lambda=\frac{20}{17}$ et $3+\frac{2\lambda'}{5}=3+\frac{2}{5}\times\frac{40}{17}=3+\frac{16}{17}=\frac{67}{17}$

Donc l'équation (2) n'est pas vérifiée.

Le système n'admet donc aucun couple solution d'où $\boldsymbol{D}\cap\Delta=\varnothing$.

**Conclusion :** $\boldsymbol{D}$ et $\Delta$ ne sont pas parallèles et leur intersection est vide. Donc elles ne sont pas coplanaires.

## $\boxed{7}$ QCM

1°) **C**

$M(-1\,;3\,;\ 2)$

$$\begin{cases} x_M=1+2t \\ y_M=2-t \\ z_M=-3-t \end{cases} \qquad \begin{cases} -1=1+2t \\ 3=2-t \\ 2=-3-t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-5 \end{cases}$$ donc $\mathbf{M}\notin\boldsymbol{D}$.

$N(2\,;-3\,;1)$

$$\begin{cases} x_N=1+2t \\ y_N=2-t \\ z_N=-3-t \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=1+2t \\ -3=2-t \\ -1=-3-t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=5 \\ t=-2 \end{cases}$$ donc $\mathbf{N}\notin\boldsymbol{D}$.

$R(3\,;1\,;-4)$

$$\begin{cases} x_R=1+2t \\ y_R=2-t \\ z_R=-3-t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$$ donc $\mathbf{R}\in\boldsymbol{D}$ (le paramètre associé à R est égal à 1).

Le point $R(3\,;1\,;-4)$ appartient à la droite $\boldsymbol{D}$ ; il est associé au paramètre $t=1$.

2°) **B**

On ne vérifie que la réponse exacte.
D'après le système d'équations paramétriques, le vecteur $\vec{v}'(2\,;-1\,;-1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Donc le vecteur $-\vec{v}'(-2\,;1\,;1)$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
**Réponse B.**

3°) **C**
Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (car $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$).
Le vecteur $\vec{u}'(2\,;-1\,;-1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$\vec{u}\bullet\vec{u}'=1\times2-1\times2+3\times1=2-2+3\neq0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux.
Par conséquent, la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$. Elle est donc sécante au plan $\mathcal{P}$.
**Réponse C.**

4°) **B**

Pour le point $G(1\,;3\,;2)$, on a : $x_G+2y_G-3z_G-1=1+2\times3-3\times2-1=0$ donc $G\in\mathcal{P}$ .
**Réponse B.**

5°) **B**

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\vec{w}(4\,;-5\,;-2)$ est un vecteur normal à $Q_2$.
$\vec{u}\bullet\vec{w}=1\times4-5\times2-3\times(-2)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, $\mathcal{P}\perp Q_2$.

**Réponse B.**

***Petit complément (non demandé) :***

Le vecteur $\vec{u}\,(1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\vec{w}(1\,;2\,;-3)$ est un vecteur normal à $Q_2$.
On a $\vec{u}=\vec{w}$ donc $\mathcal{P}\ //\ Q_1$.

6°) **A**

$$\begin{aligned} d(T\,;\mathcal{P}) &= \frac{|1+2\times(-3)-3\times2-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+2^2}} \\ &= \frac{|-1-6-6-1|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{14}} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

**Réponse A.**

## $\boxed{8}$ Étude d'une configuration dans un cube

1°) a) Le triangle ABC est équilatéral.

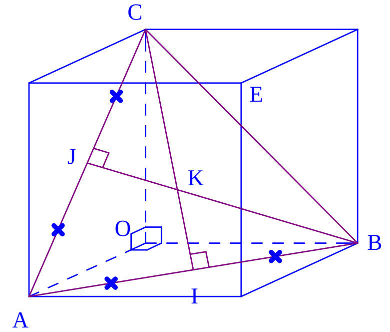
c) K est l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2°) c) $K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ (on utilise la formule permettant de calculer les coordonnées d'un barycentre dans l'espace)
La distance de O au plan (ABC) est égale à la distance OK ; $OK=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3°) a) $AB=BD=CD=DA=\sqrt{2}$
b) On calcule les coordonnées de $\Omega$ : $\Omega\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\right)$.
c) $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solution détaillée :**

**La question 1°) est résolue par la géométrie pure.**
**Les questions 2°) et 3°) sont résolues par la géométrie analytique.**




OABC est un tétraèdre trirectangle.

**Pour les codages, on peut utiliser deux traits.**

1°) a)

**• Description des faces du tétraèdre OABC :**

Les faces du tétraèdre OABC sont les triangles OAB, OBC, OCA et ABC.

Les faces OAB, OBC et OAC sont des triangles rectangles isocèles en O (ce sont des triangles « isométriques », c'est-à-dire « superposable » ou « égaux », ce qui signifie que leurs côtés ont la même longueur).

On a : $AB=BC=AC=\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1*) donc ABC est un triangle équilatéral.

* On rappelle que la diagonale d'un carré de côté $a$ a pour longueur $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$.

**• Position de I et de J :**

I est le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC et J celui de la hauteur issue de B donc, comme ABC est équilatéral, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$.

b) Figure à compléter.

Il est intéressant de coder :

- les orthogonalités de (CI) et (AB) en I et de (BJ) et (CI)
- les égalités de longueurs correspondant aux points I et J milieux respectifs de [AB] et [AC].

Se pose le problème des traits pleins et des traits en pointillés.

Il est recommandé de tracer en rouge le triangle ABC ainsi que les segments [CI] et [BJ].

On marque les noms des points I, J, K en rouge sur la figure.

c) (CI) et (BJ) sont deux hauteurs dans le triangle ABC donc leur point d'intersection K est l'orthocentre du triangle ABC.
Comme ABC est équilatéral, K est également le centre de gravité (ainsi que le cercle du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit).

**À partir de maintenant (dans les questions 2° et 3°), on va utiliser le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ (autrement dit, on fait de la géométrie analytique).**

2°) a)

**• Démontrons que le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormé.**

Le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormé Le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormé car ses axes sont deux à deux orthogonaux et $OA = OB = OC = 1$ (on peut écrire : $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = 1$ mais l'écriture avec des normes n'est pas du tout utile).

**• Donnons les coordonnées des points O, A, B, C, E dans ce repère.**

$O(0\,;0\,;0)$ (origine du repère)

Les points A, B, C sont des sommets du cube (on ne dit pas qu'ils « font partie » du cube) ; on peut donc donner les coordonnées des autres points dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

$A(1\,;0\,;0)$

$B(0\,;1\,;0)$

$C(0\,;0\,;1)$

$E(1\,;1\,;1)$

b)

**• Calculons les coordonnées de K.**

On sait que le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet.

On a donc $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ (1).

On calcule d'abord les coordonnées de I.

$I \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right.$ (formule des coordonnées d'un milieu)

(1) donne alors $\begin{cases} x_K = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ y_K = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ z_K - 1 = \frac{2}{3} \times (-1) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_K = \frac{1}{3} \\ y_K = \frac{1}{3} \\ z_K = \frac{1}{3} \end{cases}$.

$K\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$

K est le centre de gravité de ABC donc K est le barycentre des points pondérés $(A\,;1)$, $(B\,;1)$ et $(C\,;1)$.

$K \left| \begin{array}{l} x_K = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3} \\ y_K = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3} \\ z_K = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$ (utilisation de la formule de calcul des coordonnées d'un barycentre)

**Déduisons-en que $K \in [OE]$ et précisons la position de K sur le segment [OE].**

$\overrightarrow{OK}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{OE}(1\,;1\,;1)$

On a : $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$ donc $K \in [OE]$.

La position de K sur le segment [OE] est précisée par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$.

**Autres méthodes :**

1. Utilisation de l'égalité $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

2. Utilisation de l'égalité $\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.
Le centre de gravité d'un triangle est situé sur chaque médiane aux deux tiers en partant du sommet.

3. (Thomas Mordant le 22-5-2013) :

- calcul des coordonnées de I et de J ;
- recherche de systèmes d'équations paramétriques de (BJ) et (CI) ;
- détermination de leur point d'intersection K.

c)

**• Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal au plan (ABC).**

On va démontrer que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Pour que les calculs soient plus simples, on peut remplacer le vecteur $\overrightarrow{OK}$ par le vecteur $\overrightarrow{OE}$ qui lui est colinéaire.

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1\\1\\0\end{vmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{OE}\bullet\overrightarrow{AB}=-1\times1+1\times1+0\times1=0$ donc $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{OE}\bullet\overrightarrow{AC}=-1\times1+0\times1+1\times1=0$ donc $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AC}$.

Comme (AB) et (AC) sont deux droites sécantes du plan (ABC), on en déduit que (OE) ⊥ (ABC).

Par suite, le vecteur $\overrightarrow{OK}$ est normal au plan (ABC).

**• Déduisons-en la distance du point O au plan (ABC).**

Comme $K\in(ABC)$ et que (OK) ⊥ (ABC), on en déduit que K est le projeté orthogonal de O sur le plan ABC.

Par suite, la distance du point O au plan (ABC) est égale à la distance OK.

Donc $d(O,(ABC))=OK$

$$=\sqrt{(x_K)^2+(y_K)^2+(z_K)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$ on peut très bien laisser le résultat avec une racine carrée au dénominateur

3°) $D=S_O(K)$

Le point D est situé derrière le cube ce qui explique qu'on ne le place pas forcément sur la figure.

Il serait intéressant d'utiliser un logiciel de géométrie 3D pour tourner la figure et avoir D devant.
Sinon, on peut refaire la figure de sorte que D soit devant.

a) **Démontrons que le tétraèdre ABCD est régulier.**

On dit qu'un tétraèdre est régulier pour exprimer que ses arêtes ont toutes la même longueur.

On doit donc démontrer que toutes les arêtes de ABCD ont la même longueur.

D est le symétrique de K par rapport à O donc $D\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

$AB=BC=CA=\sqrt{2}$ (par application de la formule de la diagonale d'un carré)

$$DA=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}$$
$$=\sqrt{\frac{18}{9}}$$
$$=\sqrt{2}$$

On a : $AB=BC=CA=DA=DB=DC=\sqrt{2}$.

On en déduit que le tétraèdre ABCD est régulier.

b) **Démontrons que Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.**

Ω est le milieu de [OK] donc $\Omega \left| \begin{array}{l} x_{\Omega} = \frac{1}{6} \\ y_{\Omega} = \frac{1}{6} \\ z_{\Omega} = \frac{1}{6} \end{array} \right.$

On a : $\Omega\text{A} = \Omega\text{B} = \Omega\text{C} = \Omega\text{D} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

**Rappel sur les droites remarquables d'un triangle :**

Dans un triangle,

Une médiane est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

Une hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Une médiatrice est une droite perpendiculaire à un côté en son milieu.

Une bissectrice est une droite qui partage un angle en deux angles de même mesure.

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des médianes.

L'orthocentre d'un triangle est le point de concours des hauteurs.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concours des médiatrices des côtés.

Le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices du triangle.

Attention, dans un triangle quelconque, une hauteur est perpendiculaire à la base mais ne le coupe pas forcément en son milieu !!!

Vocabulaire :

On parle de hauteur issue d'un sommet, de médiane issue d'un sommet.

On dit que les hauteurs d'un triangle se coupent ou sont concourantes en un point. On ne dit pas qu'elles se croisent.

Centre de gravité : point d'intersection des médianes
Orthocentre : point d'intersection des hauteurs
Centre du cercle circonscrit : point d'intersection des médiatrices

Centre de gravité : point de concours des médianes
Orthocentre : point de concours des hauteurs
Centre du cercle circonscrit : point de concours des médiatrices