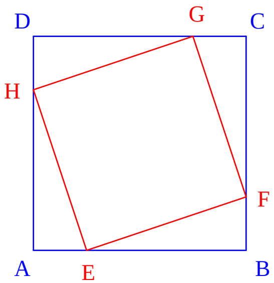
1$^{\text{ère}}$ S1 — Devoir pour le jeudi 18 avril 2013

Partie A

Soit ABCD un carré de côté *c* avec *c* > 1.
On considère les points E, F, G, H appartenant respectivement aux côtés [AB], [BC], [CD], [DA] tels que AE = BF = CG = DH = 1.
On admettra que le quadrilatère EFGH est un carré (démonstration facile qui ressemble à celle faite en 4^{e} pour la démonstration du théorème de Pythagore à l'aide d'un « puzzle »).
On note *c*' le côté de EFGH.

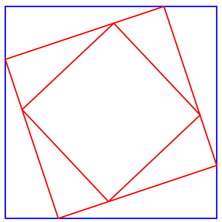


1°) Justifier que l'on a : *c*' > 1.

2°) Démontrer que l'on a : *c*' < *c*.

Partie B

On réalise la figure itérative suivante de carrés imbriqués les uns dans les autres en utilisant le même procédé que dans la **partie A**.



1°) En utilisant la **partie A**, justifier succinctement que :

- l'on peut poursuivre la construction indéfiniment ;

- le côté du carré décroît.

2°) Dans cette question, on va utiliser le logiciel *Geogebra*.

On construit une suite de carrés à partir d'un carré ABCD en appliquant la construction de la **partie A** à chaque nouveau carré.

Dans *Options*/*Etiquetage*, choisir *Seulement les nouveaux points*. Enlever les axes.

1. La première étape

a. Placer les points A(– 4 ; – 4), B(4 ; – 4), C(4 ; 4), D(– 4 ; 4) et tracer ABCD (en joignant les sommets par des segments).
Faire une figure assez grande pour que l'on puisse bien voir la suite de carrés.

b. Tracer les cercles de centres A, B, C, D et de rayon 1, puis marquer les points E, F, G, H.
Effacer les cercles (après avoir fait un clic droit, décocher *Afficher l'objet*).

c. Créer les carrés EFGH avec l'outil servant à créer un polygone.
Celui-ci sera désigné par poly 1.

2. Création d'un nouvel outil

Aller dans Outils
↳ Créer un outil.

Onglet Objets finaux
↳ Sélectionner : les points E, F, G, H.
↳ Sélectionner : quadrilatère poly 1.

Onglet Objets initiaux
↳ Sélectionner les points A, B, C, D.

Onglet Nom/Icône
↳ Taper le nom de l'outil.

↳ Cliquer sur Fin.

3. Création des carrés suivants

a. Cliquer sur l'outil créé puis sur les quatre sommets du carré (dans l'ordre) pour faire apparaître la suite des carrés au moins jusqu'au treizième carré.

b. Régler les arrondis à 10 décimales (menu *Options*/*Arrondi*).

On ne demande pas d'imprimer la figure.

3°) À l'aide de la figure dynamique, que peut-on penser de l'évolution du côté du carré lorsque l'on poursuit la construction ?

Pour aller plus loin (facultatif) :

Quels commentaires, quelles conjectures peut-on faire à l'observation de la figure ?

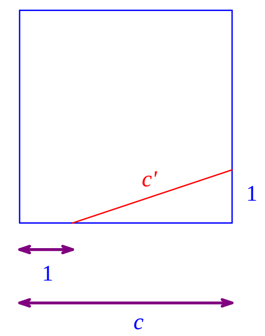
Quelles questions peut-on se poser ?

Proposer éventuellement des pistes de résolution ou mentionner les outils mathématiques que l'on peut mobiliser pour tenter d'apporter des réponses.

Corrigé

Thème : carrés « tournants » (suite de carrés imbriqués les uns dans les autres)

Partie A

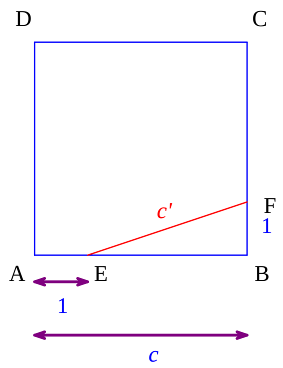


1°) **Justifions que l'on a : $c' > 1$.**

• On peut effectuer un raisonnement purement géométrique.

$c' > 1$ évident (hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est 1)

• Sinon, on peut aussi effectuer un calcul de longueur avec le théorème de Pythagore avec les noms des points.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EBF, on a : $\text{EF}^2 = \text{EB}^2 + \text{BF}^2$.
Donc $\text{EF}^2 = \text{EB}^2 + 1$.
Par conséquent, $\text{EF}^2 = \text{EB}^2 + 1$.

$\text{EB}^2 > 0$ donc $\text{EF}^2 > 1$. Par suite, EF > 1 donc $c' > 1$.

2°) **Démontrons que $c' < c$.**

• 1ère méthode :

D'après le théorème de Pythagore, on a : $c' = \sqrt{(c-1)^2 + 1}$.

On peut aussi écrire : $c' = \sqrt{c^2 + 2(1-c)}$

Comme $c > 1$, $1 - c < 0$ d'où $2(1 - c) < 0$ donc $c^2 + 2(1-c) < c^2$.

D'où par passage, à la racine carrée, on obtient : $c' < \sqrt{c^2}$.
Or $\sqrt{c^2} = c$ car c > 0 donc on en déduit $c' < c$.

• 2e méthode :

On raisonne avec les aires.
L'aire du carré EFGH est strictement inférieure à l'aire du carré ABCD.
Donc $c'^2 < c^2$.
Comme c et c' sont strictement positifs, on en déduit que $c' < c$.

• 3e méthode :

On applique l'inégalité triangulaire dans le triangle EBF.

Dans un triangle, la longueur de chaque côté est strictement inférieure à la somme des deux autres côtés.

On a : EF < EB + BF.
Donc $c' < (c-1) + 1$ soit $c' < c$.

Partie B

1°)

• **Pour justifier que l'on peut poursuivre la construction indéfiniment,** il faut se référer à un raisonnement de proche en proche (raisonnement par récurrence qui sera vu l'année prochaine).
On se réfère à la question 1°) de la partie A.
Si construit un carré inscrit dans un carré de côté $c > 1$ selon le procédé indiqué, le nouveau carré a un côté $c' > 1$ donc il est possible de recommencer la construction.

Le raisonnement par récurrence que l'on pourrait faire serait bâti ainsi :
- la construction est réalisable au rang 1 ;
- si la construction est réalisable à une étape donnée, alors elle est réalisable à l'étape suivante.
Par récurrence, on peut donc établir une la construction est réalisable à chaque étape.
On arrive toujours à construire un nouveau carré selon le procédé indiqué.

On ne s'en rend pas forcément compte car lors de la construction car au bout d'un certain nombre d'étapes il ne semble plus possible de distinguer les carrés (en fait, les carrés vont se rapprocher d'une position limite).
Mais « théoriquement », la construction la construction est possible à l'infini.
On notera d'ailleurs l'originalité de la question.

• **Pour justifier que le côté du carré décroît,** il faut se référer à un raisonnement de proche en proche.

On se réfère à la question 2°) de la partie A.
On voit que lorsque l'on applique le procédé de construction à un carré donné, le carré obtenu a un côté strictement inférieur.
En fait, on pourrait « instaurer » une suite en nommant c_n le côté du carré à l'étape *n*.
La suite (c_n) est strictement décroissante.
L'énoncé avait choisi de ne pas parler de suite mais on pouvait évidemment y penser.

3°) On observe une stabilisation du côté des carrés autour de 1 (notion de « tendre vers » déjà vue avec les dérivées). Il s'agit de la notion de convergence de suite qui sera étudiée dans un chapitre ultérieur.