L'algorithme de Théon de Smyrne

Un algorithme pour déterminer les valeurs approchées de racines carrées

On doit à Théon de Smyrne une méthode de calcul de valeurs approchées de $\sqrt{2}$ par un algorithme énoncé à peu près ainsi :

« En partant de (1 ; 1) :

- On calcule les valeurs successives de (x ; y) en remplaçant à chaque étape (x ; y) par ($x + 2y$; $x + y$)
- $\dfrac{x}{y}$ donne une approximation de $\sqrt{2}$. »

PARTIE 1. Approximation de racine de 2

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit pour la suite de matrices colonnes (R_n) telle que $R_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $R_{n+1} = A \times R_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Pour tout entier naturel n, on définit par x_n et y_n les nombres obtenus par itérations successives de l'algorithme de Théon de Smyrne.

Démontrer que pour tout entier naturel n, R_n est la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2°) Calculer alors R_{10} à l'aide d'une calculatrice, puis comparer $\dfrac{x_{10}}{y_{10}}$ avec $\sqrt{2}$.

PARTIE 2. Démonstration de la convergence

1°)

a) Justifier que les deux suites (x_n) et (y_n) sont à termes strictement positifs.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{x_n}{y_n} \geqslant 1$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\dfrac{x_n}{y_n}+1}\left(\sqrt{2} - \dfrac{x_n}{y_n}\right)$.

d) Démontrer que, tout entier naturel n, $\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|\sqrt{2} - \dfrac{x_n}{y_n}\right|$.

e) Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left(\sqrt{2}-1\right)$.

Conclure sur la convergence de la suite $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$.

2°)

a) Déterminer un entier naturel n pour lequel $\dfrac{x_n}{y_n}$ donne une valeur approchée à 10^{-8} près de $\sqrt{2}$.

b) À l'aide d'un calcul matriciel, calculer le quotient $\dfrac{x_n}{y_n}$ pour cette valeur de n.

PARTIE 3. Extension de la méthode

1°) Remplacer le coefficient $a_{1,2}$ de la matrice A par un entier naturel différent de 2.
Calculer la matrice colonne R_n correspondante pour quelques valeurs de n et faire une conjecture sur la convergence de la suite des quotients $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ si R_n est la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

2°) Énoncer une généralisation de la méthode de Théon de Smyrne pour le calcul d'une racine carrée.

3°) Démontrer ce résultat généralisé.

Théon de Smyrne :
Mathématicien grec du II^{e} siècle après J.-C. Dans son ouvrage, *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*, on trouve une approximation des irrationnels par une double suite de côtés et de diagonales carrées