1ère S1

Devoir pour le jeudi 11 avril 2013

Préambule

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note A, B, C, D les points de coordonnées respectives (2 ; 0), (0 ; 2), (– 2 ; 0), (0 ; – 2).
Ces quatre points forment un carré ABCD de centre O.

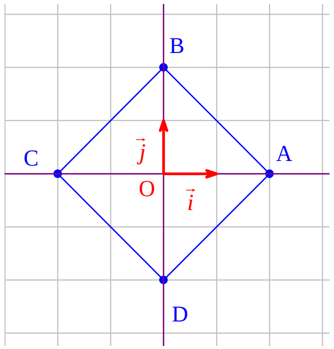
• On admettra sans démonstration que l'intérieur de ce carré (frontières exclues) est caractérisé par l'inéquation $|x| + |y| < 2$ c'est-à-dire que c'est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'inégalité $|x| + |y| < 2$.

• On admettra sans démonstration que le bord du carré est caractérisé par l'équation $|x| + |y| = 2$ c'est-à-dire que c'est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'égalité $|x| + |y| = 2$.

Étude d'un jeu

Quatre personnes s'affrontent dans le jeu suivant.
Les candidats sont de force égale et se placent aux quatre sommets du carré ABCD.
Au départ, le curseur est placé au centre.
À chaque étape, il se déplace aléatoirement dans quatre directions possibles à l'intérieur du carré :
- horizontalement vers la gauche (ouest) ;
- horizontalement vers la droite (est) ;
- verticalement vers le haut (nord) ;
- verticalement vers le bas (sud).

Le jeu s'arrête dès que le curseur arrive sur un côté.
Si le curseur est sur le segment mais pas sur les extrémités, alors les deux candidats sont déclarés gagnants ex-æquo.
Si le curseur, arrive sur un candidat, celui-ci gagne le jeu.



On associe au nord la valeur 1, à l'ouest la valeur 2, au sud la valeur 3 et à l'est la valeur 4.

1°) On considère l'algorithme ci-contre qui permet de simuler le jeu qui a été présenté.

Variables : A, K entiers naturels
X, Y entiers relatifs

Initialisations :
K prend la valeur 0
X prend la valeur 0
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque | X | + | Y | < 2 **Faire**
A prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4 (au sens large)
Si A = 1
alors Y prend la valeur Y + 1
FinSi
Si A = 2
alors X prend la valeur X – 1
FinSi
Si A = 3
alors Y prend la valeur Y – 1
FinSi
Si A = 4
alors X prend la valeur X + 1
FinSi
K prend la valeur K + 1
FinTantque

Sortie :
Afficher K

Lire cet algorithme afin de comprendre son fonctionnement.

a) Expliquer la condition « Tantque | X | + | Y | < 2 ».

b) Que représente le nombre K affiché en sortie ?

2°) Dans chaque cas, dire si le résultat est *possible*. Si oui, donner la position du curseur et dire si le jeu est fini, si le jeu a une finale ou si le jeu a un gagnant.

a) On obtient le résultat (3 ; 4 ; 2).
b) On obtient le résultat (1 ; 3 ; 3 ; 4).
c) On obtient le résultat (2 ; 1 ; 4 ; 2).
d) On obtient le résultat (2 ; 4).
e) On obtient le résultat (2 ; 4 ; 2 ; 3).

Pour aller plus loin (questions facultatives) :

• programmer l'algorithme sur calculatrice ou sur ordinateur (on peut aussi réaliser un programme sur permettant de jouer).

• modifier l'algorithme - et le programme – afin de donner une estimation du nombre moyen de coups avant que le jeu s'arrête.

• calculer la probabilité que le jeu s'arrête au bout de deux coups ? trois coups ? quatre coups ? n coups ?

Corrigé

1°)

Variables : A, K entiers naturels
X, Y entiers relatifs

Initialisations :
K prend la valeur 0
X prend la valeur 0
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque | X | + | Y | < 2 **Faire**
A prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4 (au sens large)
Si A = 1
alors Y prend la valeur Y + 1
FinSi
Si A = 2
alors X prend la valeur X – 1
FinSi
Si A = 3
alors Y prend la valeur Y – 1
FinSi
Si A = 4
alors X prend la valeur X + 1
FinSi
K prend la valeur K + 1
FinTantque

Sortie :
Afficher K

a) **Expliquons la condition « Tantque | X | + | Y | < 2 ».**

L'intérieur du carré ABCD est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $|x| + |y| < 2$.

La condition « | X | + | Y | < 2 » est vraie lorsque le curseur est à l'intérieur du carré et fausse lorsque le curseur touche le bord du carré (auquel cas le jeu s'arrête).

b) **Que représente le nombre K affiché en sortie ?**

Le nombre K affiché en sortie représente le nombre de déplacements du curseur durant le jeu ou encore le nombre d'étapes.

2°)

a) **On obtient le résultat (3 ; 4 ; 2).**
Le résultat n'est pas possible. Le jeu s'arrête au 2^{e} tour.

b) **On obtient le résultat (1 ; 3 ; 3 ; 4).**

Le résultat est possible.
Le curseur est au point de coordonnées (1 ; 1).
Les gagnants ex-æquo sont A et D.

c) **On obtient le résultat (2 ; 1 ; 4 ; 2).**
Le résultat n'est pas possible, le jeu s'arrête au 2^{e} tour.

d) **On obtient le résultat (2 ; 4).**
Le curseur est au point de coordonnées (0 ; 1).

e) **On obtient le résultat (2 ; 4 ; 2 ; 3).**
Le résultat est possible, le curseur s'arrête au point de coordonnées (– 1 ; 1).
Les gagnants ex-æquo sont C et D.

Pour aller plus loin :

• **Probabilité que le jeu s'arrête au bout de 2 coups :** $\frac{3}{4}$

En effet, le curseur fait d'abord un déplacement (dans n'importe quelle direction).
Puis à la position où il est arrivé, il a le choix entre trois directions parmi 4 (il ne doit pas revenir en arrière).

• **Probabilité que le jeu s'arrête au bout de 3 coups :** 0

Il est impossible que le jeu s'arrête au bout de 3 coups.

• **Probabilité que le jeu s'arrête au bout de 4 coups :** $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$

1 déplacement-retour en arrière - 1 déplacement - 3 choix possible de directions pour le dernier sur les 4

• **Probabilité que le jeu s'arrête au bout de 5 coups :** 0

Il est impossible que le jeu s'arrête au bout de 5 coups.

• **Probabilité que le jeu s'arrête au bout de 6 coups :** $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}$

On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre de coups avant que le jeu ne s'arrête.

Le jeu ne peut jamais s'arrêter au bout d'un nombre impair de coups.

X prend ses valeurs dans {0 ; 2 ; 4 ; …} c'est-à-dire dans l'ensemble des entiers naturels pairs.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a : $P\left(\mathrm{X} = 2k\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \frac{3}{4}$.

X suit une loi apparentée à une loi géométrique (étudiée au programme du supérieur).
Il est alors possible de calculer l'espérance et la variance de X.