$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du lundi 8 avril 2013 (50 min)

Prénom : …………………………………….……….. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (4 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \sqrt{n^2+1}$.

Compléter le raisonnement suivant permettant de déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $u_n = 2 - \sqrt{n^2+1}$ et $u_{n+1} =$ ……………………… (ne pas développer sous la racine).

Dans la suite, compléter avec le signe < ou > suivant les cas.

On part de l'inégalité : n …….. $n+1$.

On obtient ensuite les inégalités successives suivantes :

n^2 …….. $(n+1)^2$ car la fonction « carré » est ……………………………………………………....

sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

n^2+1 …….. $(n+1)^2+1$ car ……………………………………………………………………………………..

$\sqrt{n^2+1}$ …….. $\sqrt{(n+1)^2+1}$ car la fonction « …………………… » est ……………………………………..

…………………………… sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

$-\sqrt{n^2+1}$ …….. $-\sqrt{(n+1)^2+1}$ car …………………………………………………………………………

$2-\sqrt{n^2+1}$ …….. $2-\sqrt{(n+1)^2+1}$ car ……………………………………………………………………….

On en déduit que u_n …….. u_{n+1}.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : u_n …….. u_{n+1}.

On en déduit que la suite (u_n) est ……………………………………………………… à partir de l'indice … .

II. (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.

1°) Compléter directement ci-dessous (calculs au brouillon) :

$u_1 =$ ………. $u_2 =$ ……….

2°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (6 points)

Soit A, B, C trois points du plan *P*, alignés dans cet ordre sur une même droite tels que $AB = 5$ et $BC = 6$.
On note I le milieu de [BC] et J celui de [AI].

1°) Compléter sans expliquer l'égalité suivante valable pour tout point M du plan *P* : $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = ...\overrightarrow{MI}$

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 18$.
On utilisera l'une des formules dites de la médiane.

Modèle de rédaction à respecter impérativement :

• On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« M $\in E \Leftrightarrow$ ……….

$\Leftrightarrow$ ………

• On conclura ainsi : « L'ensemble *E* est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (2 points)

On considère l'algorithme ci-contre.

Vrai ou Faux ?

Si on saisit pour « *a* » la valeur 20, alors la sortie est 4.

Donner la réponse sans justifier.

☐ **Vrai** ☐ **Faux**

Entrée :
Saisir un entier naturel *a*

Initialisations :
Affecter à *n* la valeur 1
Affecter à *c* la valeur 1

Traitement :
Tantque $c \leqslant a$ **Faire**
  Affecter à *n* la valeur *n* + 1
  Affecter à *c* la valeur $c + n^2$
FinTantque

Sortie :
Afficher la valeur de *n*

V. (2 points)

Pour tout entier naturel *n* non nul, on note E_n l'ensemble des entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à *n*.
On s'intéresse aux sous-ensembles A de E_n vérifiant la propriété ***P*** :

« Si *k* appartient à A, alors $k+1$ et $k+2$ n'appartiennent pas à A » (*k* désigne un entier naturel)

On note t_n le nombre de parties de E_n vérifiant cette propriété (on admettra que l'ensemble vide vérifie ***P***).

Quelques exemples de calculs :

Pour $n=1$, $E_1 = \{1\}$. Les sous-ensembles de E_1 vérifiant la propriété ***P*** sont $\varnothing$ et {1}. Donc $t_1 = 2$.

Pour $n=2$, $E_2 = \{1\,;2\}$. Les sous-ensembles de E_2 vérifiant la propriété ***P*** sont $\varnothing$, {1}, {2}. Donc $t_2 = 3$.

Pour $n=3$, $E_3 = \{1\,;2\,;3\}$. Les sous-ensembles de E_3 vérifiant la propriété ***P*** sont $\varnothing$, {1}, {2}, {3}. Donc $t_3 = 4$.

Pour $n=4$, $E_4 = \{1\,;2\,;3\,;4\}$. Les sous-ensembles de E_4 vérifiant la propriété ***P*** sont $\varnothing$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1 ; 4}. Donc $t_4 = 6$.

On admet que, pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$ (***R***).
À l'aide de cette relation, calculer t_5 et t_6.

$t_5 =$ ………… $t_6 =$ …………

Bonus au choix à traiter sur une feuille à part (s'il reste du temps) :

• Démontrer la relation (***R***).

• Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de calculer t_n pour une valeur de *n* saisie en entrée.

Corrigé du contrôle du 8-4-2013

I.

$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 - \sqrt{n^2+1}$

Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Soit n un entier naturel quelconque.

On a : $u_n = 2 - \sqrt{n^2+1}$ et $u_{n+1} = 2 - \sqrt{(n+1)^2+1}$.

On part de l'inégalité : $n < n + 1$.

On obtient ensuite les inégalités successives suivantes :

$n^2 < (n+1)^2$ car la fonction « carré » est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

$n^2+1 < (n+1)^2+1$ car on ajoute 1 à chaque membre de l'inégalité précédente.

$\sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2+1}$ car la fonction « racine carrée » est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; + ∞[.

$-\sqrt{n^2+1} > -\sqrt{(n+1)^2+1}$ car on multiplie par – 1 les deux membres de l'inégalité précédente.

$2-\sqrt{n^2+1} > 2-\sqrt{(n+1)^2+1}$ car on ajoute 2 à chaque membre de l'inégalité précédente.

On en déduit que $u_n > u_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > u_{n+1}$.

On en déduit que la suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de l'indice **0**.

N.B. : On est obligé de préciser « strictement croissante » ou « strictement décroissante » car les inégalités sont strictes (selon la demande de l'énoncé qui demandait de compléter par > ou <).

II.

$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 3n + 1 \end{cases}$

1°) **Calculons u_1 et u_2.**

$u_1 = 2$ $\qquad$ $u_2 = 6$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{0+1} \\ &= 1 + 3\times 0 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{1+1} \\ &= 2 + 3\times 1 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

2°) **Étudions le sens de variation de la suite (u_n).**

$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 3n+1$ (d'après la relation de récurrence)

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $3n+1 > 0$.

$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$

Donc **la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 0.**

III.

A, B, C : points du plan P, alignés dans cet ordre sur une même droite tels que $AB = 5$ et $BC = 6$

I : milieu de [BC]

J : milieu de [AI]

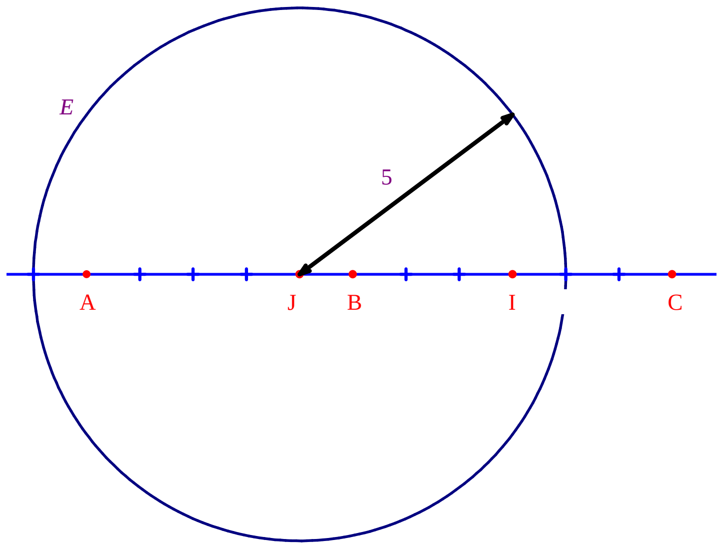
1°) **Complétons sans expliquer l'égalité suivante valable pour tout point M du plan P :**

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

2°) **Déterminons l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=18$.**

$$\begin{aligned}
M \in E &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=18\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\left(2\overrightarrow{MI}\right)=18\\
&\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}\right)=18\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}=9\\
&\Leftrightarrow MJ^2-\frac{AI^2}{4}=9 \quad \text{(l'une des formules de la médiane)}\\
&\Leftrightarrow MJ^2-\frac{8^2}{4}=9\\
&\Leftrightarrow MJ^2-16=9\\
&\Leftrightarrow MJ^2=25\\
&\Leftrightarrow MJ=5
\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble *E* est de cercle de centre J et de rayon 5.



IV.

Entrée :
Saisir un entier naturel a

Initialisations :
Affecter à n la valeur 1
Affecter à c la valeur 1

Traitement :
Tantque $c \leqslant a$ **Faire**
  Affecter à n la valeur $n+1$
  Affecter à c la valeur $c+n^2$
FinTantque

Sortie :
Afficher la valeur de n

Si on saisit pour « a » la valeur 20, alors la sortie est 4.

Vrai.

Pour a qui prend la valeur 20 en entrée :

$1 \leqslant 20$? Vrai

n prend la valeur 2
c prend la valeur $1+2^2=5$

$5 \leqslant 20$? Vrai

n prend la valeur 3
c prend la valeur $5+3^2=14$

$14 \leqslant 20$? Vrai

n prend la valeur 4
c prend la valeur $14+4^2=30$

$30 \leqslant 20$? Faux

En sortie, *n* a la valeur 4.

V. Suite associée à un problème de dénombrement

Cet exercice fait suite au sujet posé dans le contrôle du 18-2-2013.

Rappel : L'ordre des éléments n'a pas d'importance dans l'écriture d'un ensemble fini en extension.

L'énoncé définit une suite (t_n) sur $\mathbb{N}^*$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad t_{n+3} = t_n + t_{n+2} \quad$ (***R***)

$t_1 = 2$
$t_2 = 3$
$t_3 = 4$
$t_4 = 6$

On observe aisément que la relation est vérifiée pour $n = 1$; en effet, $t_4 = t_1 + t_3$.

$t_5 = t_2 + t_4 = 3 + 6 = \mathbf{9}$ (on applique la relation de récurrence pour $n = 2$)

$t_6 = t_3 + t_5 = 4 + 9 = \mathbf{13}$ (on applique la relation de récurrence pour $n = 3$)

Compréhension de l'énoncé :

Pour $n = 1$, $E_1 = \{1\}$.

{1} vérifie la propriété ***P*** (on peut dire que c'est une partie A de E_1 vérifiant ***P***).

En effet, {1} ne contient qu'un seul élément : 1 (c'est un singleton).

On doit donc vérifier la propriété uniquement pour $k = 1$.

$1 + 1 = 2$ n'appartient pas à E_1.

$1 + 2 = 3$ n'appartient pas à E_1.

Donc le singleton { 1 } vérifie la propriété ***P***.

On peut observer qu'il n'est pas possible d'obtenir aisément une expression explicite de t_n en fonction de *n*.

Bonus (très difficile pour un élève de 1$^{\text{ère}}$ S) :

• **Démontrons la relation (*R*).**

On cherche à dénombrer les parties de l'ensemble $E_{n+3} = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,...\,;\,n\,;\,n+1\,;\,n+2;\,n+3\}$ qui vérifient la propriété ***P***.

On peut raisonner par disjonction de cas en considérant les parties de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui contiennent 1 et les parties de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui ne contiennent pas 1.

♦ Pour « créer » une partie A de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui contient 1, on sait qu'elle ne contient ni 2 ni 3 car elle vérifie ***P***.
Donc il suffit de considérer une partie de l'ensemble $\{4\,;\,...\,;\,n\,;\,n+1\,;\,n+2;\,n+3\}$ vérifiant ***P***.
Or le cardinal de l'ensemble $\{4\,;\,...\,;\,n\,;\,n+1\,;\,n+2;\,n+3\}$ est égal à *n*.
Donc le nombre de parties de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui contiennent 1 est égal à t_n.

♦ Pour « créer » une partie A de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui ne contient pas 1, il suffit de considérer une partie de l'ensemble $\{2\,;\,3\,;...\,;\,n\,;\,n+1\,;\,n+2;\,n+3\}$ vérifiant ***P***.
Or le cardinal de l'ensemble $\{2\,;\,3\,;...\,;\,n\,;\,n+1\,;\,n+2;\,n+3\}$ est égal à $n+2$.
Donc le nombre de parties de E_{n+3} vérifiant ***P*** qui ne contiennent pas 1 est égal à t_{n+2}.

Ainsi, on a : $t_{n+3} = t_n + t_{n+2}$.

Avertissement : La solution n'est peut-être pas très compréhensible pour un élève de 1$^{\text{ère}}$ S !

• **Algorithme qui permet de calculer t_n pour une valeur de n saisie en entrée.**

On afficher les termes par 2. Cet algorithme fonctionne pour $n > 3$.

Entrée :
Saisir n ($n > 3$)

Initialisations :
a prend la valeur 2
b prend la valeur 3
c prend la valeur 4
d prend la valeur 6

Traitement :
Pour i allant de 4 à n avec un pas de 2 **Faire**
    u prend la valeur $a + c$
    v prend la valeur $b + d$
    a prend la valeur c
    b prend la valeur u
    c prend la valeur v
FinPour

Sortie :
Si n est pair
    Alors afficher u
    Sinon
    Afficher v
FinSi